

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN SCIENZE FISICHE

Anno Accademico 2004-2005

Tesi di Laurea Specialistica

Eventi estremi nel mercato borsistico italiano intraday: gruppo di rinormalizzazione e punti critici

CANDIDATO

Marco MUSCOGIURI

Relatore

Prof. Riccardo Mannella

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Un po' di Storia	5
1.2	Perché Studiare i Mercati?	6
1.3	Scopo del Gioco	7
2	Crash endogeni e crash esogeni	11
2.1	Log-Periodic Power Law	11
2.2	Crash endogeni e universalità	14
2.3	Crash come punto critico dinamico del sistema	19
3	Eventi estremi in finanza	23
3.1	I grossi crash sono anomali	23
3.2	Drawdowns	24
3.3	Conclusioni	28
4	Il modello	31
4.1	Feedback positivi	31
4.2	L'imitazione come strategia ottimale	33
4.3	Comportamento cooperativo	36
4.4	Griglia bidimensionale	37
4.5	Reticolo gerarchico romboidale	39
4.6	Bolle razionali	41
4.6.1	Rational Expectation Model	41
4.6.2	Crash hazard rate	43
4.7	Generalizzazione	47
5	Invarianza di scala discreta	51
5.1	Esponenti complessi	51
5.2	Ampiezza delle oscillazioni	54

6	Analisi dei drawdowns	57
6.1	Motivazioni	57
6.2	Descrizione del campione	58
6.3	Drawdowns	61
6.3.1	Distribuzione cumulativa	61
6.3.2	Drawdowns e drawups simmetrici	65
7	Analisi delle serie dei prezzi	71
7.1	Non solo bolle	71
7.2	Metodo di fit	72
7.3	Risultati	75
8	Conclusioni	93

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Un po' di Storia

Da un po' di anni a questa parte la comunità dei fisici si dedica con sempre maggiore attenzione e impegno allo studio di fenomeni legati all'economia e ai mercati finanziari.

Nella preistoria di questa attività di ricerca possiamo inserire le figure di scienziati come Pareto [28], Bachelier [2], Majorana [25], Kadanoff [21], Montroll [27]. Al primo si deve l'introduzione delle leggi a potenza nell'ambito delle scienze sociali. Tali leggi, ora così familiari per un fisico, prima della loro applicazione allo studio dei fenomeni critici, si ritenevano inadatte alla fisica per il fatto di mancare di una scala caratteristica. Bachelier nella sua tesi di dottorato formalizzò con cinque anni di anticipo su Einstein [12] il moto Browniano, applicandolo al prezzaggio di strumenti derivati. Gli altri scienziati non disdegnavano nella loro attività di fisici, di indagare le scienze sociali.

Se vogliamo datare un inizio per un approccio moderno a questo nuovo campo di ricerca, l'anno è sicuramente il 1973. Due cose molto importanti cambiarono il mondo della finanza in quell'anno: le valute cominciarono ad essere trattate sui mercati finanziari e il loro valore determinato su un mercato aperto 24 ore su 24, il 'Foreign Exchange Market'(FX); Black e Scholes [5] pubblicarono il loro famoso articolo sul prezzaggio razionale delle opzioni. Da quel momento in poi i mercati delle valute e dei derivati sono cresciuti a un ritmo impressionante.

Nel corso degli anni '80 poi ebbe luogo una vera e propria rivoluzione nei mercati che convinse molti fisici a considerare questi come un valido campo di ricerca. L'elettronica, già implementata negli scambi sui mercati azionari, fece irruzione nei mercati valutari e dei derivati e con essa la possibilità di

archiviare e avere sempre a disposizione enormi quantità di dati che farebbero la gioia di qualunque fisico. Da sottolineare, inoltre, la caratteristica di essere dati ad altissima frequenza, tali da permettere di studiare i fenomeni riguardanti i mercati a più scale temporali, cosa molte volte impossibile in campi della fisica più ortodossi.

Gli anni '90 infine, sono quelli del boom, in tutti i sensi. Il boom delle borse di tutto il mondo e lo scoppio del fenomeno, anche a livello mediatico (vedi [3]), dell'«econofisica», o fisica economica. Si moltiplicano i contatti tra il mondo dei mercati e degli intermediari e quello della comunità dei fisici. Gli uni, visto l'aumento esponenziale del valore complessivo degli scambi e la diffusione presso un pubblico sempre più vasto, cercano sempre più insistentemente gente esperta nel trattare, analizzare e interpretare grandi quantità di dati e che abbiano la capacità di modellizzare i fenomeni studiati. I fisici, ovviamente, risultano i soggetti più appropriati. Tra questi ultimi, d'altra parte, aumenta l'interesse nei confronti della finanza, che appare come un affascinante campo di ricerca dove la fisica può affiancarsi ad altre discipline, quali l'economia e le scienze sociali. Oggi l'econofisica è un'area di studio molto attiva e vivace, con legami e ricadute anche su altri settori della fisica (statistica, sistemi complessi, dinamica dei fluidi, meccanica quantistica. . .).

1.2 Perché Studiare i Mercati?

A livello 'microscopico' i mercati finanziari hanno forti legami con la fisica statistica: il trader può scegliere tra tre azioni ('stati') possibili, vendere, comprare, aspettare; la trasformazione da uno stato all'altro è un processo discontinuo, dovuto in genere al superamento di un limite, come qualche barriera di prezzo o altro; il processo è irreversibile, visto che è altamente improbabile ricomprare lo stesso asset dallo stesso trader allo stesso prezzo; i traders conoscono lo stato solo di alcuni altri e vedono la risposta collettiva del sistema in termini del valore dell'asset.

Certo, l'analogia deve fermarsi qui, però; intermediari finanziari, brokers, investitori, speculatori, affaristi e quant altro si aggira per i mercati non si comportano come le molecole di una struttura, come le stelle di una galassia o come elementi di uno spin glass, sono elementi consapevoli delle loro azioni. Sicuramente non conosciamo le leggi microscopiche che regolano i loro movimenti, le loro decisioni in fatto di investimenti, però quello che è degno di nota è che a livello macroscopico emergono molte proprietà con delle caratteristiche ben precise, identificabili, studiabili. Questo attira l'attenzione di un fisico.

Inoltre le leggi economiche che governano i mercati sono alquanto stabili

e l'evoluzione temporale degli stessi è monitorata di continuo a tempi scala ridottissimi; questo permette di poter costruire modelli la cui accuratezza può essere testata grazie alla mole di dati disponibili.

Sono diverse le aree di ricerca in questo campo. Molto interessante è quella che si occupa del prezzaggio dei derivati, che unisce aspetti teorici, legati alla natura dei processi stocastici seguiti dagli assets sottostanti il derivato, ad aspetti tecnici, che riguardano la soluzione delle equazioni di prezzaggio, una volta fatte le assunzioni di cui in precedenza. Sempre con un occhio di riguardo per le implicazioni pratiche un'altra area di ricerca è la cosiddetta 'Portfolio Selection' e i problemi relativi ad una sua ottimizzazione dinamica.

Più vicini ad un'ottica di ricerca pura sono altri aspetti dell'econofisica. Molti studi di carattere empirico sono portati avanti con l'obiettivo di arrivare ad una completa caratterizzazione delle proprietà statistiche dei processi stocastici delle variazioni di prezzo di un asset finanziario. In particolare si vuole dare una forma alla distribuzione di probabilità delle variazioni di prezzo, caratterizzare la memoria temporale di una serie storica, analizzare proprietà statistiche di ordine elevato, etc. Alcuni risultati su cui c'è un consenso generale sono stati raggiunti, come la certezza sulla finitezza del momento secondo delle variazioni di prezzo, il clustering e la correlazione a lungo raggio della volatilità, però molto ancora resta da fare per inglobare in un modello stocastico tutte le caratteristiche riscontrate nell'analisi empirica.

L'altra area complementare a questa riguarda lo sviluppo di modelli teorici, che basandosi su poche assunzioni, riproducano gli aspetti essenziali dei mercati reali. Questa è forse l'area più attiva, con innumerevoli modelli proposti, molti dei quali riescono a ritrovare proprietà fondamentali della dinamica stocastica dei prezzi come le code larghe leptokurtotiche non-Gaussiane della distribuzione delle differenze di prezzo, che si riscontra in ogni mercato, in tutte le serie storiche.

1.3 Scopo del Gioco

In questo lavoro si studia la situazione in cui i mercati sfuggono ad uno stato di equilibrio per generare i fenomeni noti come bolle e crash. In letteratura si trovano evidenze di una 'universalità' delle caratteristiche di molti crash, che si presentano come la fine di una bolla nei prezzi ben rappresentata da un accrescimento a potenza decorato da oscillazioni 'log-periodiche', con parametri molto simili tra i vari casi, se si analizza il mercato alle scale in cui l'intervallo di tempo elementare è il giorno; dopo aver presentato tali

evidenze e le teorie che ci sono dietro, lo scopo di questo lavoro è studiare queste caratteristiche a frequenze molto più alte, nel mercato intraday.

Lo stimolo ci viene dal fatto che, come vedremo, questi andamenti sono la segnatura dell'attraversamento di un punto critico e della presenza nel sistema di una particolare simmetria, l'invarianza di scala discreta, per cui è interessante chiedersi se, analizzato ad alte frequenze, il mercato continui a presentare una dinamica caratterizzata dall'esistenza di punti critici e dalla presenza di invarianza di scala discreta. Il nostro data-set è costituito da 3 anni di dati tick by tick dell'indice FIB30.

Nel capitolo 2 presentiamo alcune evidenze che si trovano in letteratura circa i fit delle bolle pre-crash con queste leggi a potenza log-periodiche (LPPL) e interpretiamo i risultati in termini di crash esogeni, dovuti all'arrivo di notizie improvvise e molto negative e crash endogeni, legati all'attraversamento, da parte del sistema di agenti, di un punto critico. Sono questi ad essere caratterizzati dalle strutture LPPL. Nello stesso capitolo notiamo come la log-periodicità sia la segnatura di una simmetria: l'invarianza di scala discreta (DSI).

Nel capitolo 3 introduciamo il concetto di drawdown e ne mostriamo l'utilità per individuare i crash di grosse dimensioni. Mostriamo alcuni dati presenti in letteratura che suggeriscono che i grandi drawdown sono outliers, cioè hanno proprietà diverse dal resto della distribuzione e vediamo che si originano da forti correlazioni temporanee, avvalorando l'idea del punto critico.

Nel capitolo 4 discutiamo un modello di Sornette che spiega da dove emergono le strutture LPPL e l'origine delle correlazioni temporanee. In questo modello la DSI si origina dalla struttura gerarchica del sistema; è quindi, per così dire, preesistente nel mercato e riflette le diverse proporzioni nella gerarchia degli operatori. Però, come vedremo, questo modello, pur se molto specifico e da cui emergono chiaramente i tipici andamenti LPPL, presenta anche dei limiti. Inoltre, è solo uno dei modelli possibili: accenneremo a diversi altri modelli proposti da Sornette e altri, da cui emergono l'andamento a potenza e la log-periodicità. Nel paragrafo 4.7 accenneremo agli elementi che, secondo Sornette, un qualunque modello di interpretazione del mercato deve avere per poter dar luogo alle LPPL. Come vedremo sono elementi molto generali, legati all'interpretazione del mercato come un sistema di traders, in contatto tra di loro, dove l'imitazione locale può ampliarsi a cascata verso una cooperazione globale. Cercando la presenza di LPPL chiariremo se questi elementi sono riscontrabili anche nella dinamica a piccola scala oppure no.

In effetti ci sono molti modi per ottenere l'invarianza di scala discreta e le conseguenti oscillazioni log-periodiche. Questo perché la DSI riflette una

sorta di invarianza incompleta, la rottura dell'invarianza continua, e ci sono molti modi per rompere una simmetria. La si può rompere mettendo il sistema su una geometria che ha di per sè una gerarchia di scale caratteristiche, ma la si può anche ottenere per via dinamica.

Nel capitolo 5 discutiamo in generale della simmetria dell'invarianza di scala discreta, mostrando come la struttura LPPL emerga naturalmente da questa ipotesi, senza rifarsi a nessun modello specifico. In questo stesso capitolo mostriamo come, con il formalismo del gruppo di rinormalizzazione, Sornette sia stato in grado di proporre un'estensione della semplice LPPL, che riesce a fittare i prezzi precedenti ai più grossi crolli per un periodo decisamente più lungo (nel caso dell'87 e del '29, mentre la semplice LPPL è valida per circa due anni prima del crash, la sua estensione cattura l'andamento dei prezzi per un periodo di circa otto anni).

I dati di Sornette mostrano che, nei casi in cui sono presenti, le oscillazioni log-periodiche costituiscono un'importante correzione alla pura legge a potenza, dell'ordine del 10%. In altri sistemi conosciuti, come un sistema con interazioni ferromagnetiche posto su particolari geometrie discrete [11], l'andamento LPPL è presente, ma le oscillazioni log-periodiche sono quasi trascurabili, in quanto dell'ordine di 10^{-4} l'andamento dominante. Sempre in questo capitolo, facendo ancora uso del formalismo del gruppo di rinormalizzazione, vedremo come Sornette ha individuato le origini, formali, di questa differenza di 5 ordini di grandezza.

Nei capitoli 6 e 7 presentiamo la nostra analisi. Il nostro obiettivo è di cercare la presenza di LPPL precedenti ai crash nei dati ad alta frequenza (intraday) e di studiarne le caratteristiche in relazione alle proprietà trovate in letteratura su queste strutture a più grande scala (universalità, appartenenza ad un'unica classe di fenomeni). Se ritroviamo questi andamenti anche nella fenomenologia dell'intraday, allora crediamo che questo possa essere utile per una migliore modellizzazione del mercato, anche a tempi scala ridottissimi, notoriamente più difficile, in quanto il mercato è decisamente lontano da uno stato di equilibrio. La presenza di queste strutture dimostrerebbe che anche nell'intraday, situazione in cui la dinamica del mercato è sicuramente influenzata, molto più che non a bassa frequenza, dalla sua struttura particolare, esistono proprietà di simmetria discreta, di cui, eventualmente, i modelli devono tenere conto.

Il risultato sembra incoraggiante: abbiamo trovato evidenze di strutture LPPL anche nelle bolle precedenti ai crash alle frequenze intraday, anche se con caratteristiche meno forti e universali rispetto a quanto si trova a basse frequenze.

Capitolo 2

Crash endogeni e crash esogeni

2.1 Log-Periodic Power Law

Da circa 10 anni diversi gruppi di ricerca, tra cui spicca, per la quantità di dati analizzati e per lo sforzo teorico rivolto alla spiegazione dei fenomeni osservati, quello guidato da Didier Sornette analizzano le serie storiche dei prezzi di molti indici, valute, merci, tassi di interesse, obbligazioni, in poche parole dei mercati finanziari in tutti i loro aspetti, nei periodi precedenti a grosse correzioni verso il basso (crash) con lo scopo di individuare le caratteristiche del sistema in occasione di questi eventi estremi per cercare di capire da cosa hanno origine tali fenomeni. L'analisi svolta fin qui ha portato all'individuazione di patterns caratteristici nei prezzi prima dei grossi crolli, con dei parametri che i dati sembrano far credere universali rispetto alle diversità dei singoli mercati in cui avviene lo specifico crash: diverso periodo storico, diversa localizzazione spaziale del mercato (New York, Tokyo, Londra, etc.), diversa tipologia di asset trattati (azioni, indici, obbligazioni, valute, oro, etc.), diversa regolamentazione degli scambi (mercati più o meno evoluti), etc. L'immagine che questi dati sembrano dipingere è un'interpretazione del crash come il raggiungimento di una sorta di punto critico dinamico del sistema.

L'andamento dei prezzi (o del loro logaritmo) nei periodi precedenti ad un crash è fittato molto bene da un accrescimento a potenza decorato da oscillazioni che si infittiscono sempre di più con l'avvicinarsi al massimo valore dei prezzi precedente il crollo. La funzione di fit proposta da Sornette [34] è la seguente

$$I(t) = A + B(t_c - t)^\beta + C(t_c - t)^\beta \cos(\omega \log(t_c - t) + \phi). \quad (2.1)$$

Questa viene chiamata Log-Periodic Power Law (LPPL). In questa equazione i parametri importanti fisicamente sono β , ω e t_c ; β rappresenta la forza

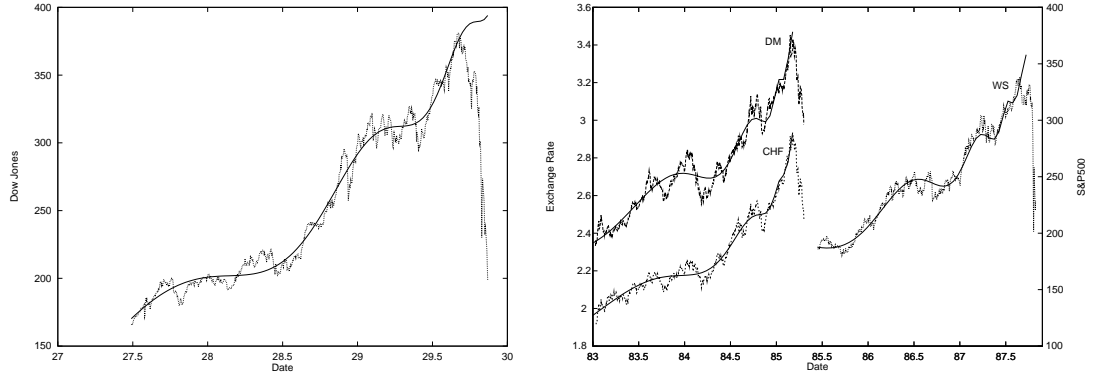


Figura 2.1: Sinistra: andamento dell'indice Dow Jones prima del crash del '29. Il fit è la (2.1) con $A \approx 571, B \approx -267, C \approx 14.3, \beta \approx 0.45, t_c \approx 30.22, \phi \approx 1.0$ e $\omega \approx 7.9$. Destra: l'indice S&P 500 prima del crash dell'ottobre 1987 a Wall Street e il valore del cambio US\$ contro DEM e CHF prima della caduta a metà '85. Il fit con l'S&P 500 è l'equazione (2.1) con $A \approx 412, B \approx -165, C \approx 12.2, \beta \approx 0.33, t_c \approx 87.74, \phi \approx 2.0, \omega \approx 7.4$. I fit con le valute DM e CHF contro il dollaro danno $A \approx 3.88, B \approx -1.2, C \approx 0.08, \beta \approx 0.28, t_c \approx 85.20, \phi \approx -1.2, \omega \approx 6.0$ e $A \approx 3.1, B \approx -0.86, C \approx 0.05, \beta \approx 0.36, t_c \approx 85.19, \phi \approx -0.59, \omega \approx 5.2$, rispettivamente. Tratte da [17].

dell'accrescimento dei prezzi, $\omega/2\pi$ è la frequenza delle oscillazioni presenti nei prezzi in funzione del logaritmo dell'intervallo di tempo $t_c - t$ e t_c è l'istante in cui il prezzo dovrebbe raggiungere, secondo il fit, il valore massimo A . Esso, quindi, dà una sorta di previsione (nei casi studiati, a posteriori) del momento del crash; in realtà la teoria sviluppata da Sornette, che presentiamo nei prossimi capitoli, assegna a t_c un significato leggermente diverso: si tratta del momento in cui è massima la probabilità dell'occorrenza del crash; quando l'espressione (2.1) viene implementata nella pratica ciò che si nota è che t_c è di poco posteriore al tempo effettivo del crash, sovrastima, cioè, il momento del crash. Il rapporto C/B dà l'ordine di grandezza delle correzioni log-periodiche rispetto al trend a potenza dominante e ϕ è solo un fattore di scala: infatti, cambiando variabile $\phi = \omega \log T$, l'argomento del coseno si può riscrivere come $\omega \log(\tau_c - \tau)$, dove $\tau = t/T$ è il tempo in unità di T .

La funzione (2.1) è stata applicata per la prima volta [34] per i crash dell'ottobre 1929 sull'indice Dow Jones e dell'ottobre 1987 sull'indice Standard & Poors 500 della borsa di New York, i più grossi crolli registrati dalla borsa americana nel secolo scorso. I fit per il periodo precedente a quelle date sono presentati nella fig. 2.1. In fig. 2.2 sono riportati altri due casi tra i più evidenti trovati da Sornette: crollo dello Standard & Poors nel 1998 e dell'indice Hang Seng della borsa di Hong Kong nel 1997.

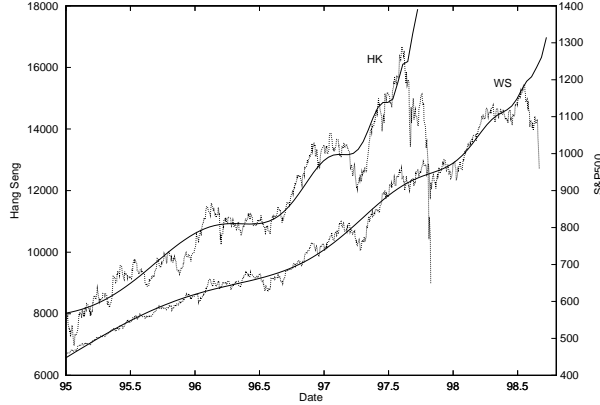


Figura 2.2: L'indice Hang Seng prima del crash dell'Ottobre 1997 alla borsa di Hong-Kong e l'S&P 500 prima del crash a Wall Street dell'agosto 1998. Il fit per l'indice Hang Seng è l'equazione (2.1) con $A \approx 20077$, $B \approx -8241$, $C \approx -397$, $\beta \approx 0.34$, $t_c \approx 97.74$, $\phi \approx 0.78$, $\omega \approx 7.5$. Il fit dell'indice S&P 500 è la (2.1) con $A \approx 1321$, $B \approx -402$, $C \approx 19.7$, $\beta \approx 0.60$, $t_c \approx 98.72$, $\phi \approx 0.75$, $\omega \approx 6.4$. Tratte da [17].

Come si vede dalle due figure la (2.1) cattura molto bene l'accrescimento della bolla più che esponenziale e soprattutto le occasionali pause in questo accrescimento rappresentate da oscillazioni nel valore dell'indice.

Il fit è ottenuto minimizzando la varianza: $\text{var}(f) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(t_i))^2$; il punto finale del tratto fittato è costituito dall'istante in cui l'indice raggiunge il valore massimo prima del crollo, quello iniziale, meno evidente, è dato dall'inizio del trend ascendente. La bontà del fit con la (2.1) rispetto al fit con un'altra funzione è dato dal rapporto tra le due varianze. Siano var_{exp} , var_{pow} e var_{lp} rispettivamente le varianze dei fit ottenuti con un'esponenziale, una legge a potenza e la (2.1). Per il crash dell'87 i risultati di Sornette danno $\text{var}_{exp}/\text{var}_{pow} = 1.1$ e $\text{var}_{pow}/\text{var}_{lp} = 3$, per cui si vede che la (2.1) è preferibile. In realtà il secondo rapporto ha meno valore del primo, in quanto l'esponenziale e la legge a potenza hanno lo stesso numero di variabili, mentre la (2.1) ne ha di più. Questo problema è stato risolto da Sornette con un'analisi non parametrica dei fit che consiste in un'analisi in frequenza da cui emerge chiaramente un picco nella frequenza data da $\omega/2\pi$.

Questa analisi è effettuata eliminando il trend dominante nei dati con la seguente trasformazione

$$I(t) \rightarrow \frac{I(t) - [A + B(t_c - t)^\beta]}{C(t_c - t)^\beta} \quad (2.2)$$

che dovrebbe lasciare un puro $\cos[\omega \log(t_c - t) + \phi]$ se nessun altro effetto è

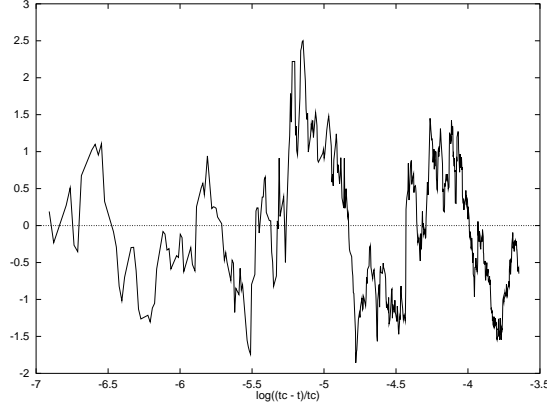


Figura 2.3: Il residuo, come definito dalla trasformazione (2.2) in funzione di $\log\left(\frac{t_c - t}{t_c}\right)$ per il crash del Dow Jones nell'87. Tratto da [17].

presente. In figura 2.3 vediamo che il residuo, ovvero la quantità lasciata da questa trasformazione, nel caso del fit sul crash del 1987, ha un convincente trend periodico come funzione di $\log\left(\frac{t_c - t}{t_c}\right)$. Sornette stima la significatività di questo trend utilizzando uno strumento chiamato periodogramma di Lomb [29]; si tratta di un fit di un coseno (con una fase) usando un range di frequenze stabilito dall'utente. Per dati equispaziati è equivalente ad un'analisi in frequenza alla Fourier, in più ha il vantaggio di poter essere usato su dati non equispaziati.

I grafici del periodogramma di Lomb dei crash fittati da Sornette, ottenuti con questo sistema, mostrano tutti un picco corrispondente alla frequenza data dal parametro ω del fit. In figura 2.4 sono sovrapposti i periodogrammi di Lomb per i 6 crash su diversi mercati i cui fit sono stati presentati in queste pagine. Come si può notare il picco si ha, per tutti i crash, intorno alla frequenza $f \approx 1.1$, che corrisponde a $\omega = 2\pi/f \approx 7$, in accordo con i dati su ω ricavati dai fit.

2.2 Crash endogeni e universalità

I valori di ω e di β per oltre 30 casi studiati da Sornette risultano compatibili con l'idea di universalità di tali parametri. In fig. 2.5 è presentata la distribuzione cumulativa dei β e degli ω , da cui si ottiene la stima $\beta \approx 0.33 \pm 0.18$ e $\omega \approx 6.36 \pm 1.55$. Questa universalità è tanto più sorprendente se si pensa che tali casi appartengono a mercati dalla tipologia, struttura, regolamentazione e localizzazione geografica molto diversa: ci sono indici di azioni

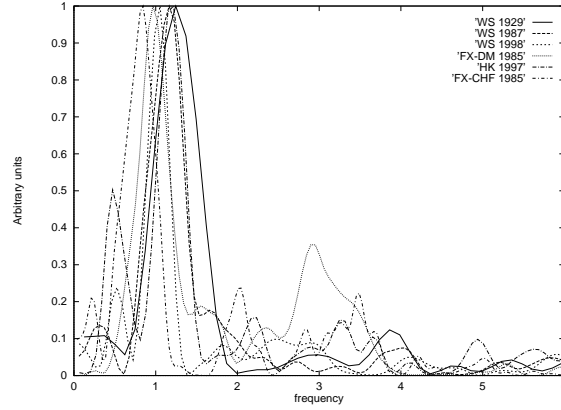


Figura 2.4: Periodogramma di Lomb per i crash di Wall Street del 1929, 1987 e 1998, di Hong Kong del 1997, del cambio US\$/DEM e US\$/CHF del 1985. Per ogni crash la significatività del picco deve essere stimata sul proprio livello di rumore. Tratto da [17].

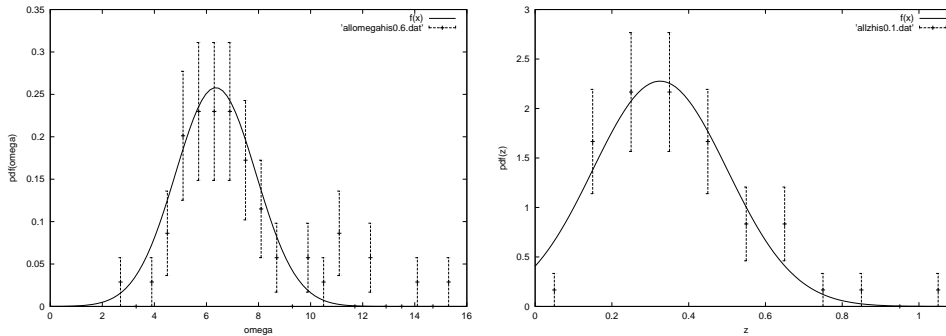


Figura 2.5: Sinistra: distribuzione empirica della frequenza angolare ω dell'equazione (2.1) per oltre 30 casi studiati. Il fit con una distribuzione gaussiana dà $\omega \approx 6.36 \pm 1.55$. Il picco più piccolo centrato su 11 – 12 suggerisce l'esistenza di una seconda armonica a $2\omega \approx 12$. Destra: Distribuzione empirica dell'esponente β nella (2.1) per oltre 30 casi. Il fit con una gaussiana dà $\beta \approx 0.33 \pm 0.18$. Tratto da [20].

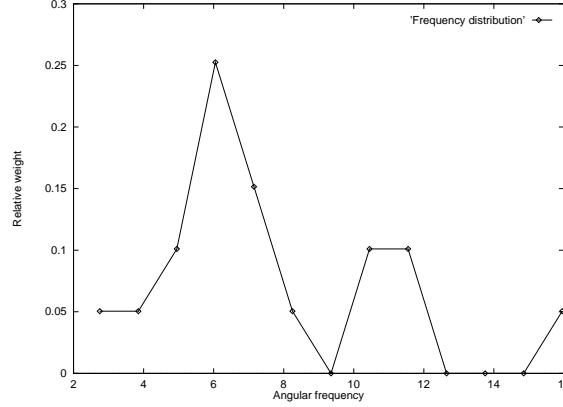


Figura 2.6: Distribuzione degli ω per i fit con la (2.1) fatti sui mercati minori. Tratto da [18].

americani (S&P, Dow Jones, Nasdaq), europei (FTSE, DAX), asiatici (NIKKEI, Hang Seng), mercati valutari (US\$/DEM, US\$/CHF, US\$/YEN), indici obbligazionari (US T-BOND, JAP BOND) e merci (Oro).

Chiamiamo tali mercati ‘evoluti: sono mercati dai grossi volumi, ritenuti efficienti e con delle ferree regolamentazioni. Sornette [18] ha anche analizzato l’occorrenza delle bolle LPPL in mercati minori, i cosiddetti mercati emergenti. Anche in questi mercati si sono trovati molti casi di crolli preceduti dall’accrescimento a potenza decorato da oscillazioni log-periodiche. La diversità rispetto ai mercati evoluti sta nella minore significatività dell’universalità dei parametri. Per i mercati sudamericani si sono trovati valori per β che vanno da 0.12 a 0.62 e per ω da 2.9 a 11.4. Come si può vedere dalle tabelle 2.1 e 2.2 e dalla figura 2.6 le fluttuazioni sono consistenti.

In un lavoro Sornette e Johansen [20] studiano i grossi crolli in maniera sistematica in due fasi: individuando gli eventi da analizzare e cercando la segnatura delle LPPL nei periodi precedenti al crollo. L’analisi è effettuata sui mercati evoluti citati in precedenza. L’individuazione degli eventi da sottoporre al fit con la (2.1) viene effettuata utilizzando il concetto di drawdown. Un drawdown è definito come una successione di variazioni di prezzo di segno negativo; l’utilità di questo concetto verrà discussa nel capitolo 3. In quel capitolo verrà anche spiegata la procedura con cui vengono selezionati i drawdowns da analizzare. Qui basterà dire che vengono selezionati quelli più grossi, i quali, si vedrà, si originano in momenti nei quali l’ipotesi di indipendenza dei rendimenti giornalieri non è rispettata, in momenti, cioè, in cui i prezzi sono fortemente correlati, indice di cooperatività tra gli agenti del mercato. I risultati sono mostrati nella tabella 2.3.

Ciò che emerge da questa analisi è che queste grosse correzioni dei prezzi

Mercato	t_c	t_{max}	t_{min}	caduta %	β	ω	λ
Argentina I	91.80	91.80	91.90	26%	0.37	4.8	3.7
Argentina II	92.43	92.42	92.90	59%	0.22	11.4	1.7
Argentina III	94.13	94.13	94.30	30%	0.19	7.2	2.4
Argentina IV	97.89	97.81	97.87	27%	0.20	10.1	1.9
Brasile	97.58	97.52	97.55	18%	0.49	5.7	3.0
Cile I	91.77	91.75	91.94	22%	0.50	7.2	2.4
Cile II	94.10	94.09	94.26	20%	0.30	2.9	8.8
Messico I	94.10	94.09	94.30	32%	0.12	4.6	3.9
Messico II	97.93	97.80	97.82	21%	0.50	6.1	2.8
Perù I	93.84	93.83	93.88	22%	0.62	11.2	1.8
Venezuela	97.75	97.73	98.07	42%	0.35	3.9	5.0

Tabella 2.1: Crash e caratteristiche dei fit di varie bolle speculative sui mercati Latino-Americani che terminano con un grande drawdown. t_c è il tempo critico previsto dal fit dell'indice con l'eq. (2.1). Sono mostrati anche gli altri parametri β , ω e $\lambda \equiv e^{\frac{2\pi}{\omega}}$ del fit. Il fit termina al tempo t_{max} , a cui l'indice del mercato ha raggiunto il valore massimo prima del crash. La caduta percentuale è calcolata dalla perdita totale da t_{max} a t_{min} , dove il mercato raggiunge il minimo come conseguenza del crash. Tratto da [18].

Mercato	t_c	t_{max}	t_{min}	caduta %	β	ω	λ
Hong-Kong I	87.84	87.78	87.85	50%	0.29	5.6	3.1
Hong-Kong II	94.02	94.01	94.04	17%	0.12	6.3	2.7
Hong-Kong III	97.74	97.60	97.82	42%	0.34	7.5	2.3
Indonesia I	94.09	94.01	94.32	26%	0.44	15.5	1.5
Malesia I	94.02	94.01	94.04	22%	0.24	10.9	1.8
Filippine I	94.02	94.01	94.19	25%	0.16	8.2	2.2
Tailandia I	94.07	94.01	94.05	20%	0.48	6.1	2.8

Tabella 2.2: Lo stesso della tabella 2.1 per i crash di mercati minori asiatici. Tratto da [18].

MERCATO	NUM.EVENTI	LPPL	SHOCK
Azioni	31	19	12
USA	12	7	5
FTSE	4	4	0
DAX	4	1	3
NIKKEI	3	1	2
HONG KONG	8	6	2
Valute	7	3	4
Obbligazioni	7	1	6
US T-BOND	4	1	3
JAP BOND	3	0	3
Merci	4	2	2
ORO	4	2	2
TOTALE	49	25	24

Tabella 2.3: Risultati dell'analisi sistematica sui crash svolta da Sornette in [20]. Nella prima colonna c'è il mercato analizzato; nella seconda colonna il numero di eventi individuati; nella terza colonna il numero di eventi preceduti da un andamento dei prezzi fittato con la (2.1); nell'ultima colonna il numero di eventi impossibili da fittare, per i quali una notizia esterna è stata individuata come causa del crash.

possono essere classificate in due categorie distinte: eventi preceduti da bolle con accelerazioni a potenza decorate da oscillazioni log-periodiche ed eventi che non presentano una segnatura caratteristica, ma per i quali è possibile individuare un evento esterno di tale portata da poter tranquillamente interpretare il crollo come la risposta del mercato al ricevimento di tale notizia. Nei casi preceduti da bolle con segnatura LPPL, invece, gli autori non trovano alcuna notizia che possa essere con chiarezza indicata come causa del crash.

Come vanno interpretati questi dati? L'analisi svolta da Sornette sembra far pensare che i grossi crolli del mercato appartengano, in sostanza, a due classi distinte:

- di tipo esogeno, ovvero legati all'arrivo di una notizia dall'esterno talmente negativa che la risposta del mercato è un indirizzamento dei prezzi marcatamente verso il basso; essi sono, in quanto tali, imprevedibili e non gettano alcuna luce sui meccanismi interni del mercato, non sono, cioè, utili allo studio di un modello dei mercati finanziari;

- di tipo endogeno, che sono quelli che vogliamo studiare in questo lavoro; in questo caso, la parola endogeno significa che sono intimamente legati alla dinamica del mercato; essi emergerebbero, indipendentemente dall'arrivo di notizie esterne, dalla struttura stessa del mercato; il mercato, cioè, viene visto non solo come un sistema che reagisce a stimoli dall'esterno, come si crede in molta parte della letteratura finanziaria, in cui il postulato fondamentale vuole l'imprevedibilità dell'andamento dei prezzi a causa del modo del tutto random con cui arrivano le notizie, ora interpretate in modo buono, ora in modo cattivo, ma esso è capace di autoorganizzarsi e indirizzare la sua dinamica anche verso situazioni di forte non equilibrio.

In effetti, molti degli eventi studiati da Sornette sembrano veramente appartenere ad una singola classe in quanto, come abbiamo visto, sono preceduti da simili patterns dei prezzi, con parametri, almeno per i mercati più evoluti, sensibilmente universali. Quindi, se questa tipologia di crash ha un'origine del tutto interna alla struttura e alla dinamica del sistema complesso che è il mercato finanziario, e si manifesta con la stessa caratteristica delle LPPL nei prezzi, questo andamento, la (2.1), deve nascondere delle informazioni sui meccanismi che governano la dinamica del mercato. Ma allora, la domanda interessante da porsi è: che significato ha la funzione (2.1)? Che informazioni ci dà sulla struttura del mercato?

2.3 Crash come punto critico dinamico del sistema

Sono due le caratteristiche della (2.1) che gettano nuova luce sui meccanismi del mercato: l'andamento a potenza e le oscillazioni log-periodiche. Come è noto, le leggi a potenza sono leggi prive di una scala di lunghezza caratteristica, sono, dunque, tipiche delle situazioni in cui è presente un'invarianza di scala. Ciò avviene, nei sistemi complessi, quando il sistema attraversa un punto critico, momento nel quale la cooperatività tra i componenti il sistema, gli agenti, è massima e il sistema nel suo complesso può agire in un'unica direzione. Quindi, per Sornette il primo elemento sulla struttura dei mercati che si ricava da questa analisi è che essi vanno inquadrati nell'ambito dei sistemi complessi, la cui dinamica può attraversare un punto critico, nel qual caso questo si manifesta come un crash. Questo è supportato dal fatto che i parametri fisicamente importanti della (2.1), ovvero β e ω , (a parte t_c , che ovviamente dipende dal singolo caso) hanno un carattere spiccatamente universale, che è ciò che ci si aspetta dalla teoria dei fenomeni critici. In

questa teoria, l'universalità che si riscontra negli esponenti critici ha origine dal fatto che al punto critico (il sistema è self-similare a diverse scale) la dinamica del sistema non è più guidata dallo specifico meccanismo caratteristico di quel particolare sistema, ma dipende solamente dalla cooperatività a livello globale degli elementi del sistema. Nel caso dei mercati emergenti si è visto che questa universalità è molto più debole; Sornette attribuisce questo fatto a 'effetti di bordo', cioè alle piccole dimensioni di questi mercati che produrrebbero degli andamenti che sono soggetti a rumore più di quanto non lo siano mercati più evoluti.

L'idea è, quindi, che il crash si origini da un lento accrescimento della cooperatività tra gli agenti, non decisa a tavolino tra di loro, ma che cresce spontaneamente a livello globale del mercato a partire da situazioni locali. Quali possono essere questi meccanismi locali che espandendosi a livello globale nel sistema possono indirizzarlo verso un crash? Sornette propone di individuare la causa nell'imitazione locale tra agenti, che può trasformarsi in cooperazione a livello globale. Nel capitolo 4 esponiamo un modello presentato da Sornette che descrive come questa imitazione tra traders, a livello locale, possa in alcuni momenti dilagare a cascata a tutte le scale del sistema rendendo lo stesso particolarmente sensibile ad uno shock esterno, il quale può triggerare l'occorrenza di un crash.

L'idea che alla base di queste strutture ci sia l'interpretazione del mercato come un sistema di traders che si imitano tra di loro, ci spinge a credere possibile l'individuazione di tali LPPL, anche ad altre frequenze, a meno che il fenomeno non venga nascosto da altri effetti.

L'altro elemento caratterizzante la (2.1) sono le oscillazioni log-periodiche che correggono il puro andamento a potenza. La funzione (2.1), con la sua log-periodicità, non è nuova agli studiosi di sistemi complessi; prima di essere applicata all'analisi dei mercati finanziari nella particolare situazione di non-equilibrio creata dall'espansione di una bolla e dal suo conseguente crash è stata utilizzata, con successo, per fittare le caratteristiche di diversi sistemi sottoposti a stress: Sornette *et al.* [1] trovano che sembra catturare molto bene l'andamento delle misure sperimentali delle emissioni acustiche precedenti alla rottura di un materiale eterogeneo sotto stress; meno evidente in generale, ma per alcuni casi specifici, come alcuni grossi terremoti in California, più convincente, la (2.1) sembra poter fittare l'energia rilasciata dall'attività sismica in una zona della Terra nei periodi precedenti un forte terremoto; sembra, quindi, che queste LPPL siano in qualche modo associate in un sistema complesso al raggiungimento di un evento estremo; in [30] c'è un elenco di esempi di svariati altri sistemi complessi che presentano questo caratteristico andamento a potenza decorato da oscillazioni log-periodiche. Inoltre, ed è forse l'ambiente in cui questi andamenti emergono più naturalmente,

essi si ritrovano in molti sistemi di elementi interagenti tra di loro, posti su una geometria gerarchica che gode di una certa simmetria: l'invarianza di scala discreta (DSI).

Così come la legge a potenza è la segnatura dell'invarianza di scala continua, che si ha in molti sistemi per esempio al punto critico, quando il sistema si presenta self-similare ad ogni scala, le oscillazioni log-periodiche sono la segnatura che la simmetria di cui gode il sistema, che emerge nell'occorrenza del punto critico non è quella continua, per cui il sistema è self-similare a tutte le scale, ma si tratta dell'invarianza di scala discreta. Questa significa che il sistema ha delle scale caratteristiche, in genere multipli di una scala fondamentale. Ciò è di fondamentale importanza per la modellizzazione del sistema, in quanto pone delle limitazioni alla fisica che lo regola; se un modello vuole essere vincente deve poter spiegare l'emergenza di queste scale.

Tali scale, che riflettono, quindi, una qualche proprietà del sistema, sono determinate dall'equazione $\omega \log(t_c - t_n) + T = 2n\pi$, che dà $t_c - t_n = t_0 \lambda^n$, con $\lambda = \exp \frac{2\pi}{\omega}$, $t_0 = \lambda^{-\frac{T}{2\pi}}$. Questi intervalli temporali non sono universali, ma dipendono dallo specifico mercato, dal sistema particolare che viene descritto; ciò che dai dati di Sornette sembra sia universale, perché associato al comportamento critico del sistema, sono i rapporti

$$\frac{t_c - t_{n+1}}{t_c - t_n} = \lambda \quad (2.3)$$

Questi rapporti potrebbero riflettere, per esempio, i tempi di rilassamento associati alla risposta degli agenti ai fondamentali dell'economia e ai loro cambiamenti. In realtà, però, non sappiamo da dove viene l'invarianza di scala discreta nel mercato, che la presenza di oscillazioni log-periodiche sembra evidenziare.

Nel caso in cui le strutture log-periodiche vengano ritrovate anche a piccola scala, questo ci direbbe che la DSI è già attiva nel mercato anche alle alte frequenze e i rapporti individuati da λ potrebbero riflettere i tempi di rilassamento associati alla risposta degli agenti non ai fondamentali dell'economia, influenti a piccola scala, ma a shock esterni. Cosa ci aspettiamo riguardo agli ω e, quindi, ai λ ? Sicuramente una minore universalità, a causa del rumore.

Capitolo 3

Eventi estremi in finanza

3.1 I grossi crash sono anomali

In questo capitolo introduciamo il concetto di drawdown e vediamo che i grandi crash sono legati a momenti di forti correlazioni temporanee, come deve essere se siamo vicini ad un punto critico. Vedremo che anche ad alte frequenze questa caratteristica dei grandi drawdowns è conservata. I crash sono eventi estremi; ci sono due possibilità per descriverli:

1. La distribuzione di probabilità delle variazioni percentuali è stazionaria e gli eventi estremi si possono estrapolare dalle code;
2. I crash non possono essere identificati con le code della distribuzione degli eventi più piccoli, ma appartengono ad un'altra distribuzione, ad un altro regime dinamico, sono perciò degli 'outliers'.

In questo capitolo presentiamo una serie di dati che ci portano a propendere per la seconda ipotesi, quella dei crash come eventi anomali rispetto alle variazioni di minore intensità, determinati dalla forte correlazione esistente nel mercato e preceduti da precursori identificabili.

È ormai accettato che la distribuzione delle variazioni percentuali di prezzo degli assets finanziari è non solo leptokurtotica, ma ha le code larghe [26, 8]. Più formalmente sembra che le code appartengano alla classe delle leggi a potenza, $P(\delta > x) \sim C/x^\mu$ con stime per μ tra 2–4; questo darebbe il secondo e forse il terzo momento finiti. Tali leggi sembrano valere per scale temporali tra i minuti e alcuni giorni, per poi convergere lentamente verso il regime gaussiano. Altre descrizioni, con tutti i momenti finiti e sempre le code larghe, sono date in termini delle funzioni 'esponenziali allungate' (SE) [22]. Limitandosi alla statistica ad un punto, però, non si ha una visione completa delle caratteristiche dei prezzi. Altre informazioni si hanno

considerando la statistica a due punti, in cui entrano in ballo correlazioni e volatilità, però non è ancora tutto. In teoria, uno vorrebbe avere a disposizione tutta la gerarchia delle funzioni di correlazione a più punti, ma questo è irrealizzabile a causa della limitatezza dei dati disponibili. Sornette aggira questo ostacolo, spinto anche dalla sottintesa idea che il tempo fisico non sia il più adatto per far emergere le caratteristiche dei mercati [9], abbandonando l'idea di una statistica a tempi-scala fissati ed introducendo il concetto di 'drawdown'.

3.2 Drawdowns

Prendiamo l'intervallo temporale di base, in questo caso il giorno: un drawdown è definito come una successione di variazioni negative del prezzo su uno o più intervalli temporali, ovvero la differenza tra il massimo locale e il successivo minimo locale. Dall'analisi dei drawdowns emerge la possibile correlazione esistente in certi momenti, perché essi sono costruiti da successioni di variazioni dello stesso segno. Questa correlazione è impossibile da trovare nella distribuzione delle variazioni di prezzo a tempo fissato, perché ovviamente questa si dimentica delle posizioni relative dei ritorni dei vari giorni; ma non si trova neanche nella funzione di correlazione a due punti, perché questa misura una dipendenza lineare mediata su tutta la serie temporale, mentre tale dipendenza può manifestarsi solo in determinati momenti e quindi venire cancellata dall'operazione di media. I drawdowns sono una valida alternativa allo studio dei momenti di ordine elevato della funzione di distribuzione e, in qualche modo, essi stessi sono funzione di questi momenti.

Il fatto che in determinati momenti le variazioni percentuali di prezzo giornaliero non siano indipendenti, ma fortemente correlate, è ben presto dimostrato: se così fosse, ci aspettiamo che una successione di 3 cadute consecutive del 10% per dare un drawdown del 30% possa avvenire con probabilità p^3 , dove p è la probabilità di avere una caduta giornaliera del 10%; prendendo una ragionevole stima di $p = 10^{-3}$ ci aspettiamo un evento del genere ogni miliardo di giorni! Nel secolo scorso, però, sono stati registrati ben 2 drawdowns di questa portata; questo ci spinge a credere che ci possano essere dei momenti di forte dipendenza e, quindi, delle possibili sacche di predittività.

Johansen e Sornette [19] hanno dimostrato che per variazioni di prezzo indipendenti x la distribuzione dei drawdowns è asintoticamente un esponenziale se la distribuzione di x non va a zero più lentamente di un esponenziale; per le distribuzioni sub-esponenziali (funzioni di Lévy, leggi a potenza, esponenziali allungati) invece, la coda della distribuzione dei drawdowns è la

stessa della distribuzione di x . Dato che le funzioni SE si sono rivelate adatte a descrivere la distribuzione delle variazioni dei prezzi [22] e, comprendendo esse come caso limite anche la funzione esponenziale, adottiamo tali funzioni ipotesi di partenza. La distribuzione cumulativa è definita in questo modo:

$$N_c(x) = A \exp(-(|x|/\chi)^z), \quad (3.1)$$

dove x è indipendentemente un drawdown o il suo equivalente per variazioni di prezzo positive, un drawup. $N_c(x)$ rappresenta un esponenziale allungato per $z < 1$; $z = 1$ è il caso dell'esponenziale puro; $z > 1$ definisce le cosiddette funzioni super-esponenziali.

Johansen e Sornette [16, 19] hanno analizzato le distribuzioni dei drawdowns per i più importanti indici delle borse mondiali, i mercati delle valute, l'oro, le 20 compagnie americane a più grossa capitalizzazione e altre 9 scelte a caso. Per un'analisi completa rimandiamo ai loro lavori, qui ci limitiamo a dare alcuni risultati: essi trovano che il 98% dei drawdowns è ben rappresentato da un esponenziale puro o allungato, mentre solo quelli più grandi avvengono con frequenza maggiore di quanto previsto. Questo è indice che le cadute più significative, i crash, appartengono a una classe diversa rispetto alle normali variazioni del mercato, che ha un suo meccanismo di amplificazione del movimento dei prezzi e ci dice che essi emergono in momenti di forti correlazioni temporanee, in quanto non rispettano l'ipotesi di indipendenza su cui si basa il fit.

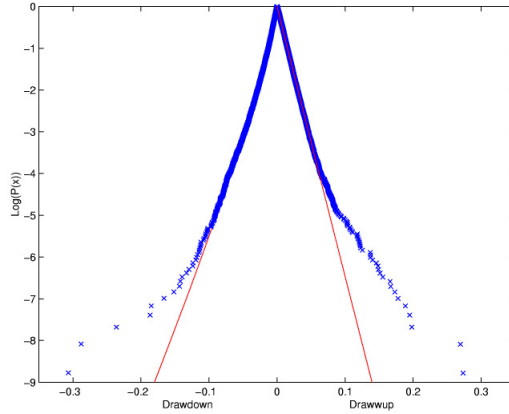


Figura 3.1: Logaritmo della distribuzione cumulativa dei drawdowns e della distribuzione complementare dei drawups per l'indice Dow Jones Industrial Average. Le linee sono fit con un esponenziale allungato. Il valore 0.1 indica il 10%. Tratto da[19].

La fig.3.1 mostra la distribuzione cumulativa dei drawdowns e quella complementare dei drawups per le variazioni di prezzo giornaliere dell'indice Dow

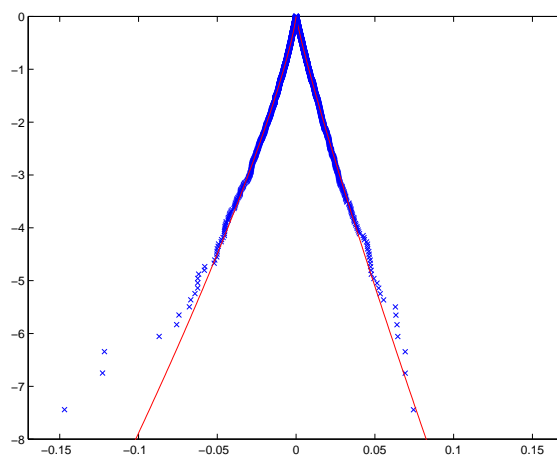


Figura 3.2: Lo stesso della fig.3.1 per il tasso di cambio US\$/YEN. Tratto da[19].

Jones nel secolo scorso. Come si può vedere per i drawdowns inferiori al 10% l'esponenziale rappresenta un ottimo fit, dando sostegno all'ipotesi di indipendenza delle variazioni di prezzo da un giorno all'altro. Quelli più grandi, però, sfuggono a questa distribuzione, in particolare avvengono più spesso di quanto previsto; quindi ci sono dei momenti in cui sono presenti delle forti correlazioni temporanee che fanno in modo che a una forte correzione dei prezzi ne possano seguire altre dello stesso livello fino a causare un grosso crash. Si veda la tabella 3.1: in essa sono presentate le caratteristiche dei 14 maggiori drawdowns dell'indice Dow Jones del secolo scorso, ovvero di quelli che non sono rappresentati dal fit esponenziale; solo 2 durano 1 o 2 giorni, mentre ben 9 hanno una durata di 4 giorni o più, punto a sostegno dell'idea delle forti correlazioni temporanee.

Sornette ha costruito la distribuzione cumulativa dei drawdowns e dei drawups per molti altri mercati, non solo azionari (vedi la fig. 3.2). Si nota per tutti la presenza di drawdowns outliers oltre una certa soglia; una immediata visione della separazione tra i due regimi, drawdowns normali e drawdowns outliers, si ha dal grafico che rappresenta l'errore relativo dei fit, vedi fig.3.3. Il discorso per i drawups è diverso: Johansen e Sornette hanno trovato che tra le compagnie analizzate nel loro lavoro i drawups maggiori del 15% avvengono il doppio delle volte rispetto ai drawdowns della stessa ampiezza, ma l'attribuzione dello status di outliers non può essere così netta. Solo metà delle serie analizzate hanno i drawups maggiori significativamente lontano dal fit (mentre per i drawdowns avviene sempre), mentre esattamente il contrario è vero per le restanti serie. Sembra, quindi, che lo status di

rank	starting time	index value	duration (days)	loss
1	1987.786	2508.16	4	-30.7%
2	1914.579	76.7	2	-28.8%
3	1929.818	301.22	3	-23.6%
4	1933.549	108.67	4	-18.6%
5	1932.249	77.15	8	-18.5%
6	1929.852	238.19	4	-16.6%
7	1929.835	273.51	2	-16.6%
8	1932.630	67.5	1	-14.8%
9	1931.93	90.14	7	-14.3%
10	1932.694	76.54	3	-13.9%
11	1974.719	674.05	11	-13.3%
12	1930.444	239.69	4	-12.4%
13	1931.735	109.86	5	-12.9%
14	1998.649	8602.65	4	-12.4%

Tabella 3.1: Caratteristiche dei 14 maggiori drawdowns del Dow Jones Industrial Average in questo secolo. Le date iniziali sono in anni decimali. Tratto da[31].

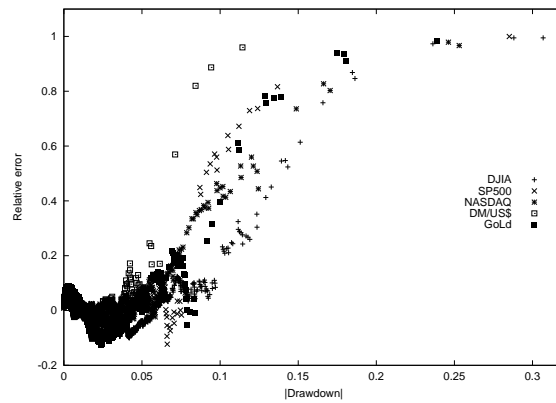


Figura 3.3: Differenza tra la distribuzione cumulativa dei drawdowns e il miglior fit con un esponenziale allungato (3.1) per il DJIA, S&P500, NASDAQ, US\$/Deutch Mark e l'oro. Tratto da[19].

outliers per i più grossi drawups non sia una caratteristica universale dei mercati, ma sia legato a specificità del mercato o dell'asset trattato.

Sornette propone un metodo per quantificare un intervallo di confidenza

con cui si considerano outliers i drawdowns più grandi: consiste nel rimescolare i dati e costruire con questi delle nuove serie. Prendiamo, per esempio l'indice Nasdaq in fig.3.4 (ancora una volta si rimanda a [19] per l'analisi completa del lavoro, qui diamo solo i risultati più importanti raggiunti da Sornette per accettare l'idea dei grossi drawdowns come outliers); Sornette rimescola i dati giornalieri e crea 1000 nuove serie. Queste serie derivano tutte, ovviamente, dalla stessa distribuzione giornaliera, ma le correlazioni presenti a certi tempi nella serie originale, se non sono generate dal caso, dovrebbero sparire. L'analisi svolta con l'aiuto di queste serie surrogate ha il vantaggio di essere non-parametrica, cioè indipendente dal particolare fit usato.

A questo punto confronta la distribuzione reale dei drawdowns con quella ottenuta dalle serie virtuali. In fig.3.5 si vede la distribuzione dei drawdowns insieme a due linee costruite al 99% di livello di confidenza in questo modo: per ogni drawdown la linea superiore (risp. inferiore) è tale per cui 5 delle distribuzioni virtuali si trovano sopra (risp. sotto) di essa. Per cui 990 su 1000 si trovano all'interno delle due linee. Anche la distribuzione reale sta all'interno di questo intervallo fino a drawdowns dell'ordine del 15%, mentre i 4 più grossi sono in questo senso outliers al 99% di confidenza. In altre parole, il caso da solo non riesce a riprodurre questi drawdowns, per cui dobbiamo ipotizzare un qualche meccanismo di amplificazione e dipendenza delle variazioni giornaliere come causa dell'occorrenza di queste anomale forti correzioni del mercato.

Un altro metodo per testare la robustezza del concetto di drawdown come outlier è di introdurre del rumore nella serie di dati. Ciò viene fatto da Sornette in diversi modi. Si può definire il drawdown ignorando gli aumenti di prezzo entro un certo valore (assoluto o percentuale) fissato o entro un certo intervallo temporale fissato; per un'analisi svolta in questo senso si veda [20]. Oppure si può semplicemente aggiungere del rumore nella serie data e controllare se la distribuzione così ottenuta differisce, nella zona degli outliers, con quella di partenza. Se il comportamento anomalo dei drawdowns in quella zona è dovuto a correlazioni di ordine elevato esso non dovrebbe essere distrutto dal rumore. Questo è quello che Sornette ha trovato: gli outliers non sono cancellati dalla presenza del rumore.

3.3 Conclusioni

Quello che si è fatto in questo capitolo è stato presentare parte dell'analisi statistica di Sornette sull'occorrenza dei grandi crash in alcuni tra i più importanti mercati mondiali, per alcune valute e per l'oro. Lo si è fatto uti-

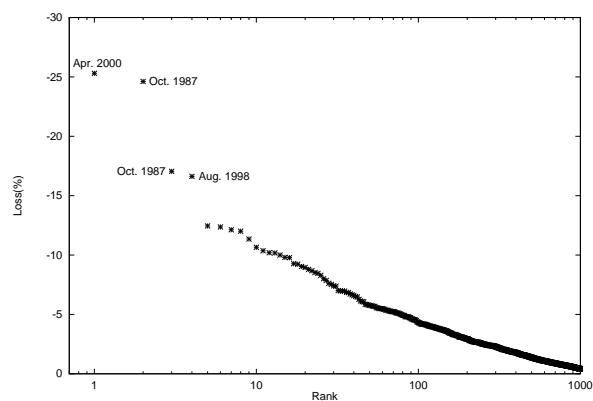


Figura 3.4: Ordine dei drawdowns nell'indice NASDAQ Composite dalla sua istituzione nel 1971 al 18/4/2000. Rank 1 è il più grande, rank 2 il secondo e così via. Tratto da[31].

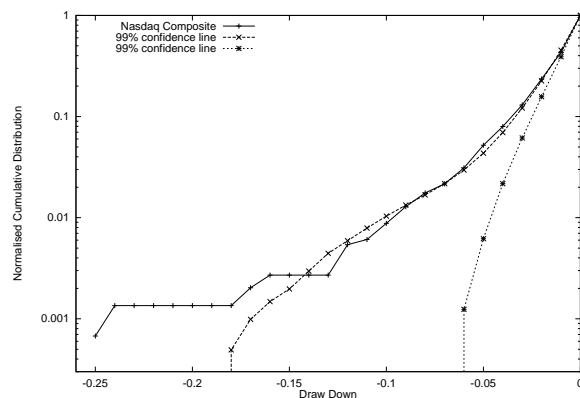


Figura 3.5: Distribuzione cumulativa dei drawdowns dell'indice NASDAQ dal 1971 al 18/4/2000. La spiegazione degli intervalli di confidenza è data nella sez.3.2. Tratto da[31].

lizzando il concetto di drawdown. L'ipotesi da sottoporre a verifica era se i maggiori tra i drawdowns di un mercato siano outliers, ovvero la loro origine sia da ricercarsi in meccanismi diversi rispetto a quelli responsabili del resto della distribuzione. I dati mostrati sembrano dare un sostegno a tale ipotesi; meno evidente, invece, l'attribuzione dello status di outlier per i drawups.

Si parte dall'ipotesi che le variazioni di prezzo siano indipendenti; questo ci porta a prendere in considerazione per fittare la distribuzione dei drawdowns la funzione esponenziale; allargando il campo alle funzioni esponenziali allungate, tenendo conto dell'esistenza di code larghe nella distribuzione dei ritorni giornalieri, in ogni caso, si verifica che i drawdowns più grandi deviano sostanzialmente dal fit, che invece è adatto a descrivere il resto della distribuzione. Alla luce di ciò possiamo affermare che le cadute più consistenti del mercato avvengono in presenza di forti correlazioni.

I crash non possono, dunque, essere estrapolati dalle code larghe della distribuzione, quindi non rientrano nel quadro della Self Organized Criticality (SOC), che vede il mercato in uno stato stazionario in cui possono avvenire i processi a valanga tipo 'sand-piles' tipici degli stati di SOC che danno origine alle code larghe. Essi sono generati da dei processi di amplificazione delle perdite diversi, in particolare, in presenza di forti correlazioni. Nel prossimo capitolo mostriamo un modello che spiega l'origine di queste correlazioni con l'avvicinarsi del mercato ad un punto critico, con tutto ciò che ne consegue: segni precursori, aumento della lunghezza di correlazione, aumento della suscettività, etc. I crash sono outliers, sono eventi speciali, perché costituiscono la drammatica fine di bolle speculative, che è il modo con cui il mercato si avvicina al punto critico.

Capitolo 4

Il modello

4.1 Feedback positivi

Ora tracciamo quelli che, secondo Sornette, sono gli ingredienti che una teoria con l'ambizione di descrivere le deviazioni dall'equilibrio dei mercati finanziari dovrebbe avere. Siccome sono le azioni degli investitori, con le loro decisioni di comprare e vendere, a muovere i prezzi degli asset finanziari, ogni deviazione da un random walk deve essere associata ad un determinato comportamento degli investitori. In particolare Sornette sottolinea l'importanza dei comportamenti che producono un feedback positivo sui prezzi, ovvero quel meccanismo per cui il fatto che il mercato abbia recentemente subito un movimento verso l'alto rende più probabile che questo movimento sia mantenuto, generando così una forte deviazione dall'equilibrio. Il feedback positivo è la forza che porta il sistema lontano dall'equilibrio, al contrario del feedback negativo che tende a riportare i prezzi al loro valore teorico fondamentale.

Quando non è controllato un meccanismo del genere può generare bolle speculative che dominano sui fondamentali del mercato rendendo lo stesso molto suscettibile ad uno shock esterno. Il feedback positivo sui prezzi è quindi, in questo modello, il carburante per generare le bolle e portare il sistema verso il punto critico. Ma quali sono i meccanismi con cui si produce un feedback positivo e in che modo questo può dominare la dinamica del sistema prevalendo sul suo opposto?

Per chi si occupa di finanza il feedback positivo dei prezzi è in genere legato alla speculazione e all'analisi tecnica; in letteratura, infatti, in una sorta di 'zoologia' degli operatori dei mercati si usa distinguere tra 'speculatori' e 'hedgers', o tra 'fundamentalists' e 'trend-chasers', ovvero investitori tecnici. Nel primo caso, gli hedgers, o produttori, sono i soggetti che utilizzano il mercato per i loro scopi, che possono essere i più diversi, proteggere un

investimento, diversificazione, percepire dividendi, etc. ed assumono una posizione di vendere o comprare non necessariamente con lo scopo di un ritorno immediato dell'investimento; per esempio sono costretti a disimpegnarsi per recuperare liquidità di cui si trovano per qualche motivo ad avere bisogno. Essi rendono liquido il mercato e creano le condizioni per la nascita di opportunità di arbitraggio di cui gli speculatori si cibano. Questi sono coloro che cercano di forzare il mercato verso una direzione per trarne vantaggio.

Nell'altra suddivisione 'zoologica' i 'fondamentalisti' sono coloro che hanno in mente un valore teorico per l'asset trattato, determinato da considerazioni economiche sui 'fondamentali' della società, nel caso di azioni, e comprano o vendono quando il prezzo è inferiore o superiore ad esso, perché sono convinti che nel tempo il mercato tornerà all'equilibrio dettato dai fondamentali e, nel farlo, essi stessi sono la forza equilibratrice del sistema. I 'trend-chasers', invece, sono coloro che si affidano al comportamento passato del mercato per trarne previsioni sul suo futuro; non hanno in mente un valore teorico per i prezzi, ma intendono speculare solo sulle sue variazioni. Il loro successo è determinato dal fatto che siano in molti a seguire le loro stesse strategie; essi comprano quando i prezzi salgono, perché pensano che così facendo, e se molti seguiranno, il trend positivo continuerà e loro se ne avvantaggeranno. In questo modo essi generano feedback positivi sui prezzi.

Un fenomeno che genera feedback positivi sui prezzi, e che gioca un ruolo importante in questo modello, è il cosiddetto effetto 'herding', legato a processi imitativi. Si dice che c'è effetto herding quando molti soggetti compiono la stessa azione perché alcuni imitano le scelte di altri. Il termine 'herd' si riferisce, ovviamente, a comportamenti simili osservati in gruppi animali. In finanza sono molte le attività che possono generare l'effetto imitativo: raccomandazioni su investimenti, rapporti di analisti, giudizi sui titoli, previsioni sugli utili, etc.

Ci sono molti eventi specifici che sono stati associati all'effetto herding, cioè ad una speculazione che si origina da un non-evento, nel senso che specificheremo immediatamente, dalla sola imitazione tra gli operatori: emblematico è il caso della EntreMed [15]. Un articolo domenicale del New York Times su un possibile sviluppo di un rivoluzionario farmaco anti-cancro da parte dell'azienda biotech EntreMed, portò il prezzo dell'azione da una chiusura di 12\$ al venerdì ad aprire la seduta di lunedì con un prezzo di 85\$; il titolo poi chiuse la giornata a 52\$ e rimase sopra i 39\$ per ben tre settimane. Il non-evento è costituito dal fatto che queste notizie erano già note, perché pubblicate cinque mesi prima su riviste autorevoli come 'Nature' e su giornali popolari come il Times. Quindi l'attenzione entusiastica della gente ha generato un movimento verso l'alto a lungo termine dei prezzi anche se nessuna nuova informazione era stata assimilata dal mercato.

Nel seguente paragrafo vediamo come implementare il feedback positivo e l'effetto herding nel modello fisico.

4.2 L'imitazione come strategia ottimale

Tutti gli operatori dei mercati sono organizzati in un network composto da famiglie, amici, colleghi, conoscenze, etc. che sono fonte di opinioni e si influenzano *localmente* attraverso questa rete di contatti. Chiamiamo 'vicini' di un agente tutti i soggetti in diretto contatto con lui. Altre fonti di opinione, a livello globale, sono TV, giornali, Internet, etc. Se il nostro agente è in contatto con k vicini, allora sono due le forze che agiscono su di lui e influenzano le sue scelte: (a) l'opinione dei k vicini insieme all'influenza dei media; (b) un segnale che solo il nostro agente riceve (o produce). È facile capire come la prima forza tenda a generare ordine, mentre la seconda è fonte di disordine. Come in molti sistemi fisici, anche qui il nocciolo della questione è la lotta tra ordine e disordine; il punto che dobbiamo analizzare è se da questa lotta si possa generare una dinamica capace di portare il sistema verso un regime di instabilità, ovvero un crash e se tale dinamica è identificabile e prevedibile.

Formalizziamo il problema: abbiamo un network di traders che chiamiamo $i = 1 \dots I$; $N(i)$ denota il set di agenti direttamente collegati a i tramite il grafico delle conoscenze di i , con i quali i può scambiare direttamente opinioni. Per semplicità assumiamo che ogni singolo agente può trovarsi in un solo stato scelto tra diverse possibilità, e come ulteriore semplificazione consideriamo solo due possibili stati: $s_i = +1$ e $s_i = -1$, interpretabili come comprare e vendere¹. È facile vedere come basandosi solo sull'informazione delle azioni $s_j(t-1)$ intraprese ieri (al tempo $t-1$) dai suoi $N(i)$ vicini, i avrebbe massimizzato i suoi profitti avendo preso ieri la decisione $s_i(t-1)$ data dal segno della somma delle azioni di tutti i suoi vicini. In altre parole la decisione ottimale di i , basata sul sondaggio effettuato sui suoi vicini, che egli spera dia una rappresentazione sufficientemente fedele del sentimento del mercato, è di imitare la maggioranza di essi. Questo a patto che il nostro agente non decida di seguire la sua 'intuizione', piuttosto che seguire le mosse dei suoi vicini. Nel presente modello questa 'intuizione' dell'agente i può essere catturata da una variabile stocastica indipendente dalle scelte di qualunque agente. Intuitivamente la ragione per cui è preferibile per l'agente i seguire le mosse della maggioranza dei suoi intervistati è che il mercato si

¹Questo modello è molto semplice perché serve solo per chiarire i concetti che vogliamo utilizzare; i risultati a cui vogliamo arrivare, ovvero identificare dei precursori dei crash, sono molto generali.

muove in quella direzione, guidato dalla legge della domanda e dell'offerta. Questa legge d'evoluzione apparentemente innocua produce nella dinamica degli interessantissimi patterns di autoorganizzazione.

I traders comprano e vendono un asset al prezzo $p(t)$ che evolve come una funzione del tempo, preso discreto e misurato in unità dell'intervallo Δt . Nella versione più semplificata del modello ogni agente può decidere se comprare o vendere solo un'unità di asset. Questo è esemplificato dallo stato $s_i = +1$ o $s_i = -1$. La compravendita avviene al tempo $t-1$ al prezzo $p(t-1)$ basato su tutta l'informazione disponibile fino all'istante $t-1$ compreso. La variazione del prezzo è presa semplicemente proporzionale alla somma $\sum_{i=1}^N s_i(t-1)$ delle azioni di tutti i partecipanti al mercato: se la somma è zero ci sono tanti compratori quanti venditori e il prezzo non cambia perché c'è un perfetto equilibrio tra domanda e offerta; se la somma è positiva ci sono più ordini di acquisto che di vendita e il prezzo deve aumentare per bilanciare domanda e offerta, in quanto il bene è troppo raro per soddisfare tutte le richieste.

Ci sono altre influenze che possono avere un impatto sui prezzi: nel modello più semplice si può tenere conto di queste aggiungendo una componente stocastica alla variazione di prezzo. Questa componente da sola darebbe il classico random walk log-normale, mentre l'equilibrio tra domanda e offerta, con la sola aggiunta dell'imitazione può portare ad un comportamento organizzativo.

Al tempo $t-1$, non appena il prezzo $p(t-1)$ viene annunciato il trader i definisce la sua strategia $s_i(t-1)$ che manterrà fino al tempo t , realizzando un profitto (o una perdita) uguale a $(p(t) - p(t-1))$ volte la posizione $s_i(t-1)$. Per definire la strategia ottimale, il trader i deve calcolare i profitti attesi P_E condizionati alle informazioni disponibili e alla sua posizione per poi scegliere lo stato $s_i(t-1)$ che rende massimo P_E : questo è quello che si aspetta da degli agenti razionali. Siccome il prezzo si muove con l'opinione generale $\sum_{i=1}^N s_i(t-1)$, la strategia migliore è di comprare se questa quantità è positiva e vendere se negativa. La difficoltà sta nel fatto che il singolo trader non può conoscere le posizioni $s_j(t-1)$ di tutti i partecipanti al mercato; la cosa migliore che può fare è di effettuare un sondaggio tra i suoi $N(i)$ vicini e ottenere la sua previsione sulla variazione di prezzo da questa informazione. C'è un'altra informazione di cui il trader ha bisogno: la probabilità P_+ e P_- che un qualunque agente compri o venda. Queste sono le uniche informazioni che può usare per gli agenti che non è in grado di sentire direttamente. Con questi elementi può costruirsi il suo valore atteso per la variazione di prezzo. Il caso più semplice corrisponde a un mercato senza drift dove $P_+ = P_- = 1/2$.

Basandosi sulla regola che la variazione di prezzo è proporzionale alla

somma delle azioni di tutti i traders, la migliore previsione che i può fare è che la prossima variazione di prezzo sarà proporzionale alla somma delle azioni prese dai suoi $N(i)$ vicini che è riuscito a intervistare, sperando che questi siano un campione abbastanza rappresentativo dell'intera popolazione. La migliore strategia è quindi data dalla seguente espressione:

$$s_i(t-1) = \text{sign} \left(K \sum_{j \in N_i} s_j + \sigma \epsilon_i \right) \quad (4.1)$$

La funzione $\text{sign}(x)$ vale $+1$ (risp. -1) per x positivi (risp. negativi), K è una costante positiva inversamente proporzionale alla 'profondità del mercato': più grande è il mercato più piccolo sarà l'impatto sui prezzi di un dato sbilanciamento tra la domanda e l'offerta, ϵ_i è un rumore gaussiano e $N(i)$ è il numero di vicini con cui il trader i è in contatto diretto. In parole povere quello che l'espressione (4.1) stabilisce è che la migliore decisione di investimento per un trader è di prendere quella della maggioranza dei suoi vicini nel limite di un'incertezza, rappresentata dal rumore, che cattura la possibilità che questi diano una previsione sbagliata del comportamento del mercato nel suo complesso.

L'espressione (4.1) può essere interpretata come la formulazione matematica della famosa parabola sul concorso di bellezza di Keynes. Keynes ipotizzava che i prezzi delle azioni non siano solo determinati dai fondamentali di una società, ma che, in aggiunta, psicologia di massa e attese degli investitori giochino un ruolo decisivo. Era sua ferma convinzione che gli investitori professionisti preferiscano spendere le proprie energie non per stimare i fondamentali di una società, ma per analizzare e prevedere i comportamenti futuri della folla di investitori. Per cui, egli diceva, molte persone sono interessate non nel fare affidabili previsioni a lungo termine dei possibili rendimenti di un investimento, ma nel prevedere i cambiamenti nella comune base di valutazione giusto poco tempo prima che lo facciano tutti.

Keynes usa il famoso esempio del concorso di bellezza per descrivere i mercati finanziari. Al fine di indovinare quale tra le concorrenti sarà la reginetta di bellezza il concetto di bellezza oggettiva non è influente, molto più importante è la conoscenza o la previsione dell'idea che gli altri hanno di bellezza. Nell'idea di Keynes la strategia migliore non è di scegliere la ragazza che si crede essere la più bella, ma quella che gli altri giocatori, o i giudici, pensano sia l'opinione generale di bellezza, o ancora, quella che gli altri giocatori pensano gli altri giocatori ritengano sia l'opinione generale, o si può continuare con questo gioco iterativo.

L'espressione (4.1) cattura precisamente questo concetto: l'opinione s_i al tempo t dell'agente i è funzione di tutte le opinioni al tempo $t-1$ dei

suoi vicini, le quali a loro volta sono funzione dell'opinione di i al tempo $t - 2$, etc. Nella situazione di equilibrio stazionario in cui tutti gli agenti finalmente formano un'opinione dopo che si sono sviluppati molti di questi loop iterativi, la soluzione di (4.1) è esattamente quella che tiene conto di tutte queste opinioni in modo consistente compatibilmente con tutti i loop.

4.3 Comportamento cooperativo

Il comportamento imitativo presentato nella precedente sezione e catturato dall'espressione (4.1) appartiene a una classe molto generale di modelli dinamici stocastici sviluppati per descrivere l'interazione di elementi, particelle, molecole in una varietà di sistemi soprattutto fisici e biologici. La tendenza verso l'imitazione è rappresentata dalla costante di accoppiamento K , mentre la spinta verso il disordine è governata dall'ampiezza σ del termine di rumore. Dunque il valore di K rispetto a σ determina il risultato della lotta tra ordine e disordine e, alla fine, la struttura dei prezzi. Generalizzazioni del modello possono prevedere diversi valori K_{ij} per le diverse coppie di agenti, senza compromettere le proprietà del modello.

L'espressione (4.1) descrive lo stato di un agente in un dato istante. Nel successivo intervallo di tempo si realizzano nuovi ϵ_i , nuove influenze si propagano tra i vicini e gli agenti possono eventualmente cambiare le loro decisioni. Il sistema, quindi, cambia e si riorganizza di continuo. Perciò l'unica descrizione che possiamo fare è di tipo statistico. Molte quantità possono servire allo scopo. Probabilmente quella che meglio descrive la probabilità che un grosso gruppo di agenti si trovi a mettere in atto la stessa azione è la suscettività. Per definirla formalmente assumiamo che un termine di influenza globale sia aggiunto all'espressione (4.1):

$$s_i(t - 1) = \text{sign} \left(K \sum_{j \in N_i} s_j + \sigma \epsilon_i + G \right). \quad (4.2)$$

Questo termine di influenza globale tenderà a favorire lo stato $+1$ (risp. -1) se $G > 0$ (risp. $G < 0$). Definito lo stato medio come $M = (1/I) \sum_{i=1}^I s_i$, in assenza di influenza esterna e per K abbastanza grandi $E[M] = 0$, mentre se $G \neq 0$ allora $E[M] \times G > 0$. Con questa notazione la suscettività del sistema è definita come:

$$\chi = \left. \frac{d(E[M])}{dG} \right|_{G=0} \quad (4.3)$$

In poche parole, χ descrive la sensibilità dello stato medio a una piccola influenza globale. La suscettività ha anche un'altra interpretazione: è proporzionale alla varianza dello stato medio M intorno allo zero, causata dagli

shock random ϵ_i . Una terza interpretazione è questa: se si prendono due agenti e se ne forza uno in una certa posizione, allora l'impatto che questo intervento avrà sull'altro agente è proporzionale a χ . Per questi motivi la suscettività misura correttamente l'abilità di un sistema di agenti di concordare su un'opinione.

Questo modello *non* assume propagazione istantanea delle opinioni tra i vicini; in effetti è probabile che nei mercati reali l'opinione di un investitore si formi lungo un periodo di tempo, coinvolgendo la famiglia, amici, colleghi, TV, Internet, giornali, etc. e che la decisione venga messa in atto solo quando il consenso generale proveniente da tutte queste fonti superi un livello che la attiva. È proprio questa caratteristica che è catturata dall'espressione (4.1): l'opinione generale è rappresentata dalla somma sugli $N(i)$ vicini e il livello da superare è fornito dalla funzione $\text{sign}(x)$. Questo è il punto più delicato riguardo all'applicazione di questo modello anche alle alte frequenze. In effetti non è per niente scontato che l'imitazione possa propagarsi a tutto il sistema anche a tempi scala ridotti. L'individuazione o meno delle LPPL ci consentirà di dare una prima risposta a tale domanda. Quello che resta da fare ora, per definire il modello, è di capire come è fatto il network di collegamento tra agenti. Infatti è provato che diversi tipi di networks possono portare a diversi andamenti della suscettività.

4.4 Griglia bidimensionale

Il modello più semplice prevede una griglia bidimensionale nel piano euclideo. Ogni agente ha quattro primi vicini: uno a Nord, uno a Sud, uno a Est e uno a Ovest. Questo non è altro che il modello di Ising in due dimensioni per descrivere la magnetizzazione nei sistemi di spin, solo la formulazione è un po' diversa da quella classica in quanto qui viene evidenziato il ruolo dinamico. Il modello di Ising bidimensionale è stato risolto esplicitamente da Onsager nel 1944. In tale modello esiste un valore critico K_c che determina le proprietà del sistema. Quando $K < K_c$ (vedi fig. 4.1) regna il disordine: la sensibilità del sistema a una piccola influenza globale esterna è minima, i clusters degli agenti che hanno formato un'opinione comune rimangono di piccole dimensioni e l'imitazione si propaga solo tra i vicini. In questo caso la suscettività χ del sistema è piccola, perché molti clusters in stati diversi reagiscono in modo incoerente, praticamente cancellandosi a vicenda.

Quando la costante K aumenta e si avvicina a K_c (vedi la fig. 4.2), l'ordine comincia ad apparire: il sistema diventa particolarmente sensibile a una piccola perturbazione globale, i clusters di agenti che sono in uno stato comune si ingrandiscono, l'imitazione si propaga su notevoli distanze. In

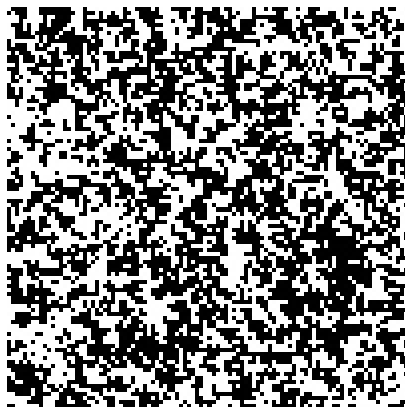


Figura 4.1: $K < K_c$: modello di Ising con 128×128 agenti. Ci sono approssimativamente lo stesso numero di celle bianche (compratori) e di celle nere (venditori). La grandezza dei clusters maggiori dà un'idea della lunghezza di correlazione, ovvero della distanza a cui l'imitazione locale tra vicini si propaga prima di venire cancellata dal rumore. Tratto da [31].

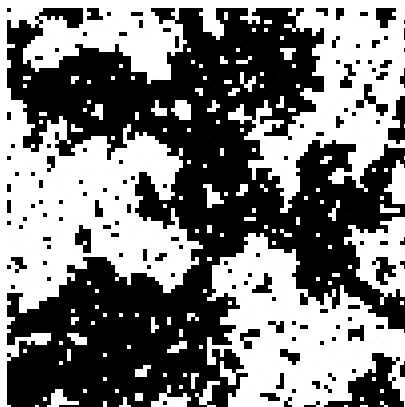


Figura 4.2: Lo stesso della fig. 4.1 ma per K vicino a K_c . Ci sono approssimativamente lo stesso numero di celle bianche e nere, cioè il mercato non ha una direzione precisa; però la dimensione dei cluster più grossi è paragonabile a quella del sistema. In più si possono osservare clusters di ogni dimensione. Questa struttura 'frattale', o 'invariante di scala', è caratteristica di uno 'stato critico', dove la lunghezza di correlazione e la suscettività diventano infinite, o limitate alle dimensioni del sistema. Tratto da [31].

fisica, queste sono le caratteristiche dei fenomeni critici. Formalmente, la suscettività del sistema diventa infinita e lo fa con un andamento tipico: la legge a potenza

$$\chi \approx A(K_c - K)^{-\gamma}, \quad (4.4)$$

dove A è una costante positiva e $\gamma > 0$ è chiamato l'esponente critico della suscettività (uguale a $7/4$ per il modello di Ising bidimensionale). Il valore elevato della suscettività significa che il sistema è instabile: una piccola perturbazione esterna può generare una reazione collettiva degli agenti che, rivedendo le loro posizioni, possono produrre un forte sbilanciamento tra la domanda e l'offerta, generando un crash o un rally del mercato. Un meccanismo con cui ciò può avvenire verrà descritto nella sezione 4.6.

4.5 Reticolo gerarchico romboidale

Il comportamento tipico del modello di Ising si ritrova anche in molti altri modelli con topologie diverse. Forse una topologia che meglio si adatta alla descrizione di un sistema come il mercato finanziario deve avere delle caratteristiche gerarchiche. Indubbiamente il mercato è costituito da un insieme di investitori interagenti tra di loro che differiscono l'uno dall'altro in dimensioni anche per parecchi ordini di grandezza: si va dai piccoli risparmiatori, ai grossi investitori, alle banche, istituzioni finanziarie, investitori professionali, grossi fondi pensione, etc. Inoltre c'è l'esistenza di strutture a più alto livello, come le sfere di influenza delle grosse valute (US\$, EUR, YEN) e, con l'attuale fenomeno della globalizzazione e della de-regolamentazione dei mercati, si può anche ipotizzare la formazione di una struttura a larghissima scala quale l'economia globale.

Probabilmente una rappresentazione del mercato in termini di una griglia bidimensionale è, quindi, troppo ingenua e semplicistica e un modello più evoluto deve prevedere un sistema gerarchico con gli agenti posti su ogni livello della struttura. In questo modo l'imitazione può avvenire tra elementi vicini allo stesso livello (i professionisti si consultano tra di loro e non chiedono consiglio ai piccoli risparmiatori), ma può ugualmente propagarsi a cascata tra i diversi livelli.

Discutiamo ora un modello gerarchico che è stato risolto esattamente; in tale modello appare che nell'andamento della suscettività nelle vicinanze del punto critico emerge una caratteristica nuova e importantissima. La costruzione della griglia comincia con due agenti legati tra di loro; rimpiazziamo questo legame con un rombo, dove i due agenti occupano due vertici diametralmente opposti, e dove gli altri due vertici sono occupati da altri due

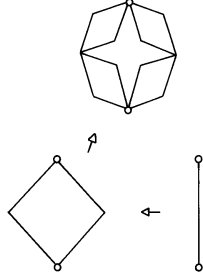


Figura 4.3: Primi tre passi del processo iterativo di costruzione del reticolo gerarchico romboidale.

traders. Il rombo contiene quattro legami; per ognuno di questi, lo si rimpiazza con un nuovo rombo nello stesso modo utilizzato in precedenza e si iteri il processo. Il risultato è mostrato in fig. 4.3.

Dopo p iterazioni abbiamo $\frac{2}{3}(2 + 4^p)$ traders e 4^p legami tra di loro. La maggior parte degli agenti ha solo due vicini, alcuni (quelli di partenza) ne hanno 2^p e gli altri un numero compreso tra questi due. Si noti che gli agenti che hanno il minor numero di connessioni hanno 2^{p-1} volte meno vicini di quelli col maggior numero di legami, i quali, a loro volta, hanno approssimativamente 2^p meno vicini di quanti siano in totale gli agenti.

Questo modello è stato risolto da Deridda [11] nel 1983. Le proprietà fondamentali sono simili a quelle del modello di Ising: esiste un punto critico K_c ; la suscettività è finita per $K < K_c$ e va all'infinito quando K aumenta e si avvicina a K_c . L'unica differenza, ma tremendamente importante, è che l'esponente critico può essere un numero complesso. La soluzione generale per la suscettività è una somma di termini come nell'espressione (4.4), ma con esponenti complessi. L'espansione al primo ordine dell'equazione generale è:

$$\chi \approx \text{Re}[A_0(K_c - K)^{-\gamma} + A_1(K_c - K)^{-\gamma+i\omega} + \dots] \quad (4.5)$$

$$\approx A'_0(K_c - K)^\gamma + A'_1(K_c - K)^\gamma \cos[\omega \log(K_c - K) + \psi] + \dots \quad (4.6)$$

dove A'_0 , A'_1 , ω e ψ sono numeri reali, e $\text{Re}[\cdot]$ denota la parte reale di un numero complesso. Vediamo che la legge a potenza viene corretta da oscillazioni la cui frequenza esplode man mano che ci avviciniamo al punto critico. Queste oscillazioni sono chiamate 'log-periodiche' e $\frac{\omega}{2\pi}$ è chiamata, con una brutta parola, la loro 'log-frequenza'.

A questo punto, per completare la descrizione di questo modello di mercato, resta da esporre in che modo questa descrizione microscopica si rivela sulle quantità macroscopicamente rilevanti come i prezzi. Ciò viene fatto nella seguente sezione.

4.6 Bolle razionali

4.6.1 Rational Expectation Model

Viene descritto ora un modello di Sornette, evoluzione di un modello di Blanchard e Watson, per descrivere macroscopicamente il mercato nei periodi di bolle e crash; legando, poi, i due punti di vista, microscopico e macroscopico, Sornette trova che i prezzi precedenti al crash devono seguire un certo andamento. Il background è fornito dal modello dei valori attesi razionali (bisogna dire che in inglese suona meglio: rational expectation model, ovvero REM) di bolle e crash ideato da Blanchard [6] nel 1979 e sviluppato da Blanchard e Watson [7] nel 1982. Gli autori introdussero questo modello per descrivere la possibilità, tanto discussa in letteratura e da chi si occupa professionalmente di mercati, che i prezzi possano deviare significativamente e per un intervallo di tempo prolungato dai loro valori fondamentali.

Pur consentendo ai prezzi di allontanarsi dal loro valore teorico, il modello mantiene un caposaldo della modellizzazione economica, cioè che le bolle devono obbedire alla condizione delle attese razionali degli investitori. Questo modello si muove, quindi, all'interno dei limiti tracciati dalla condizione di razionalità degli agenti e dall'ipotesi di efficienza del mercato, ovvero dell'assenza di arbitraggi. Questo modello mostra che deviazioni sensibili dai valori fondamentali dei prezzi possono registrarsi anche in un sistema di agenti totalmente razionali sia nelle loro attese dei valori futuri sia nei comportamenti: tali bolle sono chiamate 'bolle razionali'. Esse possono verificarsi quando i prezzi dipendano positivamente dai rendimenti attesi, nel modo seguente.

Nella condizione di attese razionali, la miglior stima che possiamo fare per il prezzo p_{t+1} di un asset al tempo $t + 1$ visto dal tempo t è data dal valore atteso di p_{t+1} condizionato dalla conoscenza di tutta l'informazione disponibile fino al tempo t , chiamata $\{\mathcal{F}_t\}$: $E[p_{t+1} | \mathcal{F}_t]$.

La condizione di non arbitraggio impone che i rendimenti attesi di ogni asset siano tutti uguali sotto una data misura di probabilità \mathbb{Q} . In particolare, il rendimento atteso di ogni asset è uguale al rendimento r di un titolo privo di rischio (che si assume esista) e, quindi, la misura di probabilità \mathbb{Q} è chiamata misura di probabilità neutra verso il rischio. Mettendo insieme queste due condizioni si arriva alla seguente formula per il prezzo p_t :

$$p_t = \delta \cdot E_{\mathbb{Q}}[p_{t+1} | \mathcal{F}_t] + d_t \quad \forall \{p_t\}_{t \geq 0}, \quad (4.7)$$

dove d_t rappresenta i dividendi e $\delta = (1 + r)^{-1}$ è il fattore di sconto. Il primo termine nel membro di destra dell'espressione (4.7) quantifica il fatto che il valore di qualcosa domani è inferiore a oggi per un fattore, detto di sconto. Intuitivamente il secondo termine, il dividendo, è aggiunto per esprimere il

fatto che il prezzo atteso domani deve essere diminuito del dividendo perché esso è incorporato nel prezzo prima dello stacco.

Una soluzione a (4.7) è ben nota e si tratta del valore fondamentale:

$$p_t^f = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[d_{t+i} | \mathcal{F}_t]. \quad (4.8)$$

Si dimostra semplicemente per sostituzione che la somma della soluzione fondamentale (4.8) e di un processo arbitrario X_t

$$p_t = p_t^f + X_t, \quad (4.9)$$

dove X_t deve solo obbedire alla condizione di martingala

$$X_t = \delta \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t], \quad (4.10)$$

è ancora soluzione di (4.7). In effetti, si può dimostrare che la (4.9) è la soluzione generale di (4.7). Quindi, il termine $X(t)$ rappresenta la deviazione del prezzo dal suo valore fondamentale.

Da sottolineare, quindi, che nel modello di Blanchard e Watson le bolle speculative appaiono come naturale conseguenza della formula (4.7) di valutazione dei prezzi, cioè della condizione di non arbitraggio e di razionalità degli agenti. Dunque, il concetto di bolla non è un'aggiunta esterna alla teoria ma esce fuori automaticamente da essa. Un'altra curiosità da sottolineare riguardo a questo modello è come la simmetria di parità

$$p \rightarrow -p \quad (4.11)$$

sia rotta dal campo 'esterno' rappresentato dal flusso di dividendi d_t . In effetti se $d_t = 0$ il prezzo fondamentale è identicamente nullo e la soluzione generale, data dal solo termine (4.10) di speculazione rispetta la simmetria (4.11). Questo discorso vale, però, a patto di dare un significato ai prezzi negativi. Per esempio, noi siamo disposti a pagare un prezzo (positivo) per un bene che ci piace o di cui abbiamo bisogno, ma mai per qualcosa che non ci interessa o ci disturba; saremmo, però, disposti a pagare un prezzo negativo, cioè a ricevere soldi insieme al bene, se dobbiamo sopportare dei fastidi, del tipo conservare i rifiuti dei vicini a casa nostra!² Quello che rende un'azione

²In realtà ci sono degli esempi economici molto più calzanti: alcuni Stati sono disposti a comprare a prezzi negativi, ovvero ad ottenere del denaro insieme ad esse, le scorie nucleari di altre nazioni, anzi il business in gioco ammonta a centinaia di miliardi di dollari; come esempio meno ovvio, le compagnie elettriche a volte vendono i loro surplus di elettricità a prezzi negativi, perché per loro sarebbe più costoso spegnere una centrale per poi riaprirla.

attraente è la capacità della società di generare profitti, dunque dividendi, e il potenziale apprezzamento che dà luogo alla speculazione e al capital gain. Dunque, in assenza di dividendi e di speculazione il prezzo deve essere nullo e la parità (4.11) è soddisfatta. I profitti, che portano dei dividendi, agiscono come un ‘campo’ di rottura di simmetria, in quanto un d_t positivo rende l’azione attraente e dunque spinge verso un prezzo positivo. È chiaro che un dividendo negativo, cioè un premio che deve essere pagato per mantenere il possesso dell’azione, porterebbe ad un prezzo negativo, cioè al desiderio di liberarsi del bene, se questo non reca altri benefici.

Il termine X_t di martingala ha il compito di ripristinare la simmetria: può andare verso l’alto o verso il basso e, nel limite in cui diventa molto grande in valore assoluto, dominare sul prezzo fondamentale, ripristinando l’indipendenza nei confronti dei dividendi.

4.6.2 Crash hazard rate

Inserendosi nello schema del precedente modello di Blanchard e Watson, Sornette propone una dinamica generale per il termine $X(t)$, introducendo il concetto di ‘tasso di rischio’ di un crash (che chiamiamo hazard rate) e trovando il suo legame con il prezzo; quindi, rifacendosi alla precedente descrizione microscopica, ipotizza per l’hazard rate un particolare andamento nei pressi del punto critico. In tal modo si ottiene un’espressione per l’andamento dei prezzi precedente ad un crash che può essere verificato sulle serie storiche. In questo modello il crash viene presentato non come il risultato certo di una particolare dinamica del sistema, ma come un evento random, che ha una certa probabilità di avvenire ed è tale probabilità ad essere influenzata dal comportamento degli investitori. Sornette si mette nella condizione di un asset puramente speculativo che non paga dividendi, che ha, quindi, un valore fondamentale nullo. Il prezzo del bene è pari, dunque, alla componente speculativa X_t , cioè alla familiare ipotesi di martingala:

$$\forall t' > t \quad \delta_{t \rightarrow t'} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [X(t') | \mathcal{F}_t] = X(t). \quad (4.12)$$

Questa non è altro che la generalizzazione della (4.10) per tempi continui, in cui $\delta_{t \rightarrow t'}$ rappresenta il fattore di sconto dal tempo t al tempo t' .

Sornette propone la seguente dinamica generale data da

$$dX = m(t)X(t)dt - kX(t)dj, \quad (4.13)$$

dove $m(t)$ può essere una qualsiasi funzione causale di X stesso. L’aggiunta di un processo a salto serve per catturare la possibilità che la bolla termini

con un crash; j è zero prima del crash e uno dopo. La natura casuale del verificarsi del crash è modellizzata dalla distribuzione cumulativa $Q(t)$ dell'istante del crash, dalla rispettiva distribuzione di probabilità $q(t) = dQ/dt$ e dall'hazard rate $h(t) \equiv q(t)/[1 - Q(t)]$. L'hazard rate è la probabilità che il crash avvenga nel prossimo istante a condizione che non sia già avvenuto, cioè:

$$E_{\mathbb{Q}}[dj | \mathcal{F}_t] = h(t)dt. \quad (4.14)$$

Usando $E_{\mathbb{Q}}[X(t + dt) | \mathcal{F}_t] = (1 + rdt)X(t)$, dove r è il fattore di sconto privo di rischio, prendendo il valore atteso di (4.13) condizionato all'informazione disponibile al tempo t e usando l'equazione (4.14) si ottiene

$$E_{\mathbb{Q}}[dX | \mathcal{F}_t] = m(t)X(t)dt - kX(t)h(t)dt = rX(t)dt, \quad (4.15)$$

che porta a

$$m(t) - r = kh(t). \quad (4.16)$$

Se l'hazard rate $h(t)$ aumenta, il rendimento $m(t) - r$ sopra il tasso d'interesse privo di rischio deve anche aumentare per compensare gli investitori del maggiore rischio. Viceversa, se la dinamica della bolla fa schizzare i prezzi verso l'alto, la condizione dei valori attesi razionali impone un maggiore rischio di crollo per assicurare l'assenza di opportunità di arbitraggi: il rendimento, però, rimane costante e uguale al tasso privo di rischio. Inserendo la (4.16) nella (4.13) si ottiene un'equazione differenziale che, per t precedenti al crash ($dj = 0$), è risolta da:

$$\log \left[\frac{X(t)}{X(t_0)} \right] = rt + k \int_{t_0}^t h(t')dt' \quad \text{prima del crash} \quad (4.17)$$

Questa è l'equazione per il prezzo della bolla, condizionata al fatto che il crash non è ancora avvenuto. Nel seguito prendiamo, senza perdita di generalità $r = 0$, in modo da eliminare il trend del mercato dovuto alla semplice svalutazione dei prezzi. L'integrale dà la probabilità cumulativa del crash fino all'istante t . Questa formula dà il logaritmo del prezzo della bolla come l'osservabile rilevante del processo. Maggiore è la probabilità di un crash, più velocemente deve crescere la bolla al fine di soddisfare la condizione di martingala. Viceversa, più alti sono i prezzi, maggiore è la probabilità di un crash imminente. Questo è l'unico effetto catturato dal modello. Da notare che la dinamica della bolla può essere qualsiasi cosa, in particolare può anche essere tale che la distribuzione dei rendimenti abbia le code larghe

Uguualmente si può ottenere semplicemente il prezzo (e non il suo logaritmo) come osservabile del processo prendendo una dinamica per $X(t)$ leggermente diversa:

$$dX = m(t)X(t)dt - k[X(t) - X_1]dj. \quad (4.18)$$

Mentre nel caso dell'equazione (4.13), l'ipotesi alla base è che il crollo sia di una percentuale fissa $k \in (0, 1)$ del prezzo della bolla, la (4.18) assume che durante un crash il crollo sia una percentuale fissa della differenza del prezzo della bolla con un valore di riferimento X_1 . In questo caso la (4.17) va sostituita con questa:

$$X(t) \approx X(t_0) + k(X(t_0) - X_1) \int_{t_0}^t h(t') dt' \quad \text{prima del crash} \quad (4.19)$$

Ora resta da capire come collegare questo risultato, in particolare l'espressione (4.17) con i modelli microscopici citati in precedenza, ovvero vedere come è fatto l'hazard rate. In quei modelli il parametro chiave, che guida la dinamica del sistema, è il parametro K , il quale 'quantifica' il livello di imitazione, di cooperatività esistente nel sistema. Il parametro K evolve secondo una sua dinamica, che *non* conosciamo; l'unica ipotesi che Sornette fa è che K evolve in maniera differenziabile, in modo tale da poter effettuare l'espansione di Taylor intorno al punto critico. Non è necessario neanche che l'evoluzione di K sia deterministica, può trattarsi di un processo stocastico, purché si evolva in maniera sufficientemente lenta.

Questo è un altro punto in cui il modello potrebbe cedere alle alte frequenze: è, infatti, plausibile che l'evoluzione di K sia, a piccola scala, molto più caotica che non alle frequenze ordinarie, sempre a causa del rumore. Gli agenti, infatti, possono cambiare le loro idee riguardo all'imitazione molto più rapidamente, perché bombardati da un continuo flusso di notizie, mentre alle basse frequenze tutto ciò che arriva nella giornata viene filtrato e condensato in un'unica informazione: il prezzo di giornata.

Detto questo, sia t_c il primo istante in cui $K(t_c) = K_c$; allora in un certo intervallo di tempo precedente a t_c si può usare l'approssimazione $K_c - K(t) \approx \text{costante} \times (t_c - t)$. A questo punto Sornette, pensando $h(t)$ come una misura, al pari della suscettività, della coordinazione tra agenti, ipotizza per l'hazard rate lo stesso andamento di χ nelle vicinanze del punto critico. Quindi, a seconda della topologia della griglia microscopica di agenti utilizzata, si ha per il prezzo, o per il suo logaritmo, facendo riferimento alle espressioni (4.17), (4.19), (4.4) e (4.6), un risultato differente.

Prendiamo la griglia bidimensionale euclidea del modello di Ising; l'hazard rate nei pressi del punto critico ha questa espressione:

$$h(t) \approx B \times (t_c - t)^{-\alpha}, \quad (4.20)$$

dove B è una costante positiva. L'esponente α deve essere compreso tra zero e uno per considerazioni di carattere economico: maggiore di zero perché deve modellizzare l'esplosione del rischio di crash e non il suo azzeramento e minore

di uno perché, altrimenti, il prezzo andrebbe all'infinito con l'approssimarsi del punto critico. Ciò che diverge a t_c è la probabilità di avere un crash, condizionata al fatto che ciò non sia già avvenuto.

Qui occorre sottolineare che t_c *non* è il tempo del crash, in quanto il crollo può verificarsi in qualsiasi momento precedente t_c ; t_c è l'istante più probabile perché il crash avvenga. Esso può verificarsi prima, come anche dopo, in quanto esiste una residua probabilità $1 - Q(t_c)$ di oltrepassare t_c senza incappare in un crollo dei prezzi. Tutto questo perché in questo modello di Sornette il crash non è un elemento deterministico, ma è caratterizzato da una probabilità di avvenire; questo è l'unico modo per conciliare l'idea del crash in un sistema di traders razionali. Essi sanno che il crash è un'eventualità, grazie a questo modello sanno anche individuarne dei precursori, ma non hanno per niente idea di quando il crollo avverrà esattamente, dunque non possono mettere in atto strategie di arbitraggio per anticiparlo.

Per il prezzo si ha, a seconda della scelta per la dinamica di $p(t) \equiv X(t)$ una delle seguenti espressioni:

$$\log[p(t)] \approx \log[p_c] - \frac{kB}{\beta} \times (t_c - t)^\beta \quad \text{prima del crash} \quad (4.21)$$

oppure

$$p(t) \approx p_c - \frac{kB}{\beta} \times (t_c - t)^\beta \quad \text{prima del crash} \quad (4.22)$$

dove $\beta = 1 - \alpha \in (0, 1)$ e p_c è il prezzo nell'istante critico (a patto che il crash non sia già avvenuto). Dunque, anche il logaritmo dei prezzi segue una legge a potenza, con un limite superiore finito $\log[p_c]$. Ciò che diverge a t_c è la pendenza del logaritmo, ovvero il rendimento atteso per unità di tempo; questo per compensare l'esplosione della probabilità del crash nell'istante successivo.

Per quanto riguarda l'altro modello microscopico, quello gerarchico, allo stesso modo si arriva alla seguente espressione per l'hazard rate:

$$h(t) \approx B_0(t_c - t)^{-\alpha} + B_1(t_c - t)^{-\alpha} \cos[\omega \log(t_c - t) + \psi]. \quad (4.23)$$

Anche in questo caso l'hazard rate esplode al punto critico, ma mostra anche delle oscillazioni log-periodiche. Infine, l'evoluzione per il prezzo prima del tempo t_c è data da:

$$\log[p(t)] \approx \log[p_c] - \frac{\kappa}{\beta} \{B_0(t_c - t)^\beta + B_1(t_c - t)^\beta \cos[\omega \log(t_c - t) + \phi]\} \quad (4.24)$$

oppure

$$p(t) \approx p_c - \frac{\kappa}{\beta} \{B_0(t_c - t)^\beta + B_1(t_c - t)^\beta \cos[\omega \log(t_c - t) + \phi]\} \quad (4.25)$$

dove ϕ è una costante di fase. Ecco che appaiono le oscillazioni log-periodiche nel prezzo dell'asset prima di t_c . Come abbiamo visto, esse sono tali che i massimi locali della funzione sono separati da intervalli che vanno a zero all'approssimarsi del punto critico e ci vanno con una progressione geometrica, cioè il rapporto tra due intervalli di tempo consecutivi è una costante:

$$\lambda \equiv e^{\frac{2\pi}{\omega}}. \quad (4.26)$$

Questo è molto utile da un punto di vista pratico, perché tali oscillazioni sono più facilmente rintracciabili nei dati reali che non una semplice legge a potenza: un fit può 'incastrarsi' su queste oscillazioni, che contengono informazioni su t_c . Se sono presenti possono essere utilizzate per estrapolare il tempo critico t_c ; dato che in questo istante la probabilità del crash è massima si può 'prevedere' l'approssimarsi di un crash. Ancora una volta bisogna sottolineare che per gli agenti razionali del modello tale previsione è del tutto inutile: essi conoscono già come è fatto l'hazard rate per ogni tempo, incluso t_c e hanno inglobato questa informazione nei prezzi attraverso l'equazione (4.17) o la (4.19).

4.7 Generalizzazione

Il modello discusso nelle sezioni precedenti non è l'unico presentato da Sornette capace di generare leggi a potenza log-periodiche nell'andamento dei prezzi prima di un punto critico. In [32] viene descritto un modello, che ha come base di partenza nuovamente il 'rational expectation model' di Blanchard e Watson, ma diverso da quello appena discusso: il 'Non-linear super exponential rational model'. È diverso in quanto, mentre nel precedente il punto di vista è che sia l'hazard rate a guidare i prezzi, vedi l'espressione (4.17), in questo viene invertita questa logica. Ancora un altro modello di bolle e crash, sviluppato da Sornette *et al.* e presentato in [10], questa volta al di fuori del 'rational expectation model', è un modello che descrive l'interazione tra due tipologie diverse di investitori, quelli dal comportamento imitativo, i cosiddetti 'trend-chasers', che seguono i trend del mercato e quelli che vi si oppongono. Infine, sempre di Sornette, in [36] si trova un modello microscopico gerarchico, con un'altra topologia rispetto a quello analizzato in precedenza, ma la cui caratteristica è, ancora, quella di trovare, prima che il sistema raggiunga il punto critico, un andamento a potenza decorato da oscillazioni log-periodiche.

Tutto questo per dire che non c'è un unico modello per arrivare a questi risultati; quindi, forse, come ipotizza Sornette essi derivano da condizioni molto generali, che poi possono essere implementate in una grande varietà

di modelli. Sornette afferma che modelli di crash che combinano le seguenti proprietà:

1. Un sistema di traders influenzati dai propri vicini;
2. Imitazione locale che può propagarsi spontaneamente e diventare cooperazione globale;
3. Cooperazione globale tra agenti come la causa del crash;
4. Prezzi legati alle proprietà del sistema;
5. Parametri del sistema che evolvono lentamente nel tempo;

mostreranno le stesse caratteristiche di quelli presentati in precedenza, ovvero prezzi che seguono un andamento a potenza nei pressi di un qualche istante critico, con un esponente reale o complesso. La caratteristica comune a questa classe di modelli è che il crash è più probabile quando il sistema localmente imitativo attraversa un punto critico.

Un sistema diventa critico quando l'influenza locale si propaga per grandi distanze e lo stato medio del sistema diventa estremamente sensibile ad una piccola perturbazione, ovvero le varie parti del sistema agiscono in modo correlato. L'altra caratteristica dei sistemi al punto critico è la 'self-similarità' alle varie scale: nel modello di agenti presentato in precedenza questa si manifesta dando al sistema la tipica struttura in cui in un oceano di traders nello stato -1 si trovano isole di agenti nello stato $+1$, al cui interno, a loro volta, vi sono gruppi di agenti nello stato -1 e così via. È a causa di questa invarianza di scala che il comportamento del sistema vicino al punto critico deve essere rappresentato da una legge a potenza, con esponente reale o complesso: questa è l'unica funzione omogenea, cioè non cambia (a parte un fattore moltiplicativo) quando il suo argomento viene riscaldato.

Le evidenze presentate in precedenza della presenza di questi andamenti a potenza log-periodici nei dati reali sono indice, quindi, della natura cooperativa dei mercati in quanto sistemi complessi. L'andamento a potenza è la segnatura di un punto critico, le oscillazioni log-periodiche, ovvero l'esponente critico complesso, come vedremo nel prossimo capitolo, sono la segnatura dell'invarianza di scala discreta. Tale invarianza di scala discreta si manifesta con la presenza di una gerarchia di intervalli temporali caratteristici del sistema (i quali riflettono una qualche proprietà del sistema che non conosciamo) $t_c - t_n$ determinati dall'equazione $\omega \log(t_c - t_n) + T = 2n\pi$, che dà $t_c - t_n = t_0 \lambda^n$, con $\lambda = \exp \frac{2\pi}{\omega}$, $t_0 = \lambda^{-\frac{T}{2\pi}}$.

Questi intervalli temporali non sono universali, ma dipendono dallo specifico mercato, dal sistema particolare che viene descritto; ciò che ci si aspetta

sia universale, perché associato al comportamento critico del sistema, sono i rapporti

$$\frac{t_c - t_{n+1}}{t_c - t_n} = \lambda \quad (4.27)$$

Questi rapporti potrebbero riflettere, per esempio, i tempi di rilassamento associati alla risposta degli agenti ai fondamentali dell'economia e ai loro cambiamenti. In realtà, però, non sappiamo da dove viene l'invarianza di scala discreta nel mercato, che la presenza di oscillazioni log-periodiche sembra evidenziare. Nel modello discusso in precedenza si origina dalla struttura gerarchica del sistema; è quindi, per così dire, preesistente nel mercato e riflette le diverse proporzioni nella gerarchia degli operatori. Però questo modello ha dei limiti, in quanto non sappiamo come interpretare le distanze tra traders (la distanza fisica, ovviamente, non ha alcun significato); inoltre, l'ipotetica struttura non è fissa, ma i collegamenti tra gli agenti cambiano continuamente.

In effetti ci sono molti modi per ottenere l'invarianza di scala discreta e le conseguenti oscillazioni log-periodiche. Questo perché la DSI riflette una sorta di invarianza incompleta, la rottura dell'invarianza continua, e ci sono molti modi per rompere una simmetria. La si può rompere mettendo il sistema su una geometria che ha di per sé una gerarchia di scale caratteristiche, ma la si può anche ottenere per via dinamica. Si veda [33] per un modello in cui le oscillazioni log-periodiche emergono non da una preesistente geometria, ma dalla dinamica del sistema. Si tratta di un modello deterministico, che genera delle traiettorie nello spazio delle fasi che esplodono in un tempo finito e con delle oscillazioni log-periodiche.

Capitolo 5

Invarianza di scala discreta

5.1 Esponenti complessi

In questo capitolo vediamo come le oscillazioni log-periodiche che decorano la legge a potenza possano essere derivate analizzando l'invarianza di scala discreta e come esse siano in realtà solo il primo ordine dell'espansione in serie di Fourier della soluzione generale di una funzione che goda di questa simmetria.

Cominciamo col dire cosa è l'invarianza di scala continua: per un sistema significa riprodurre se stesso a diverse scale di lunghezza, temporale o spaziale. Formalmente: un osservabile \mathcal{O} , che dipenda da un parametro di controllo x , è invariante sotto l'arbitrario cambiamento di scala $x \rightarrow \lambda x$, se c'è un numero $\mu(\lambda)$ tale che

$$\mathcal{O}(x) = \mu \mathcal{O}(\lambda x) \quad . \quad (5.1)$$

L'equazione (5.1) definisce una funzione omogenea e, come si è visto, si incontra nella teoria dei fenomeni critici. La sua soluzione è una legge a potenza $\mathcal{O}(x) = Cx^\alpha$, con $\alpha = -\frac{\log \mu}{\log \lambda}$. Il rapporto $\frac{\mathcal{O}(\lambda x)}{\mathcal{O}(x)} = \lambda^\alpha$ non dipende da x ; cioè, il rapporto tra l'osservabile a due diverse scale dipende solamente dal rapporto tra le scale.

L'invarianza di scala discreta (DSI) è una forma più debole di simmetria. Il sistema, o l'osservabile, obbedisce all'invarianza di scala, come definita in precedenza, ma solo per determinati valori di λ , (e quindi di μ) che in genere formano un set infinito, ma numerabile, di valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ che possono essere scritti come $\lambda_n = \lambda^n$. λ è il rapporto fondamentale di scaling.

Da notare che, dal momento che $x \rightarrow \lambda x$ e $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mu \mathcal{O}(\lambda x)$ è equivalente a $y \equiv \log x \rightarrow y + \log \lambda$ e $\log \mathcal{O}(y) \rightarrow \log \mathcal{O}(y + \log \lambda) + \log \mu$ una trasformazione di scala è semplicemente una traslazione di $\log x$ che porta a una traslazione

di \mathcal{O} . L'invarianza di scala continua è, quindi, equivalente all'invarianza traslazionale continua espressa nel logaritmo delle variabili. Allo stesso modo, l'invarianza di scala discreta è, dunque, il restringimento ad un'invarianza traslazionale discreta. Passare da un'invarianza di scala continua alla DSI è (nelle variabili logaritmiche) come, in fisica della materia, passare dallo stato liquido a quello solido: il gruppo delle simmetrie non è più il set completo delle traslazioni, ma solo quelle multiple di un generatore fondamentale, legato al passo reticolare.

Vediamo ora da dove si ricava l'esponente complesso. Cerchiamo una soluzione di (5.1) del tipo $\mathcal{O}(x) = Cx^\alpha$; inserendola nell'equazione (5.1) si trova $1 = \mu\lambda^\alpha$. Riscrivendo 1 come $e^{i2\pi n}$ si ottiene:

$$\alpha = -\frac{\log \mu}{\log \lambda} + i\frac{2\pi n}{\log \lambda} \quad . \quad (5.2)$$

Il caso speciale $n = 0$ dà la solita legge a potenza reale caratteristica dell'invarianza continua. In questo caso, cioè di invarianza continua, si vede che α non dipende da λ . Infatti, l'equazione (5.1) deve valere per ogni λ ; effettuiamo, in particolare, un rescaling infinitesimo, cioè $\lambda \rightarrow 1^+$. Per λ infinitesimo possiamo scrivere $\lambda = e^{a_1 l}$ con a_1 costante e l il parametro che controlla il rescaling. Con queste notazioni $\mu = e^{a_2 l}$ perché $\mu(\lambda)$ è continua e $\mu(0) = 0$. Dunque $\alpha = -\frac{a_2}{a_1}$, con $n = 0$ perché α non può dipendere dal fattore di scaling l per l'invarianza continua.

La soluzione generale della (5.1) è

$$\mathcal{O}(x) = x^\alpha P\left(\frac{\ln x}{\ln \lambda}\right) \quad (5.3)$$

dove $P(y)$ è un'arbitraria funzione periodica di periodo 1. Espandendola in serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(2n\pi i \frac{\ln x}{\ln \lambda})$, si vede che $\mathcal{O}(x)$ diventa una somma di leggi a potenza con lo spettro discreto di esponenti complessi $\alpha_n = \alpha + i2\pi n / \ln \lambda$, dove n è un intero arbitrario. In particolare, l'espressione (2.1) è l'espansione troncata al primo ordine:

$$I(t) = A + B(t_c - t)^\beta + C(t_c - t)^\beta \cos(\omega \ln(t_c - t) + \phi) \quad (5.4)$$

con $\omega = 2\pi / \ln \lambda$.

In [35] Sornette e Johansen propongono un'estensione della (5.4) al secondo ordine nella serie di Fourier

$$I(\tau) = A + B \frac{(\tau_c - \tau)^\beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_c - \tau}{\Delta_t}\right)^{2\beta}}} \left[1 + C \cos \left(\omega \log(\tau_c - \tau) + \frac{\Delta_\omega}{2\beta} \log \left(1 + \left(\frac{\tau_c - \tau}{\Delta_t} \right)^{2\beta} \right) \right) \right] \quad (5.5)$$

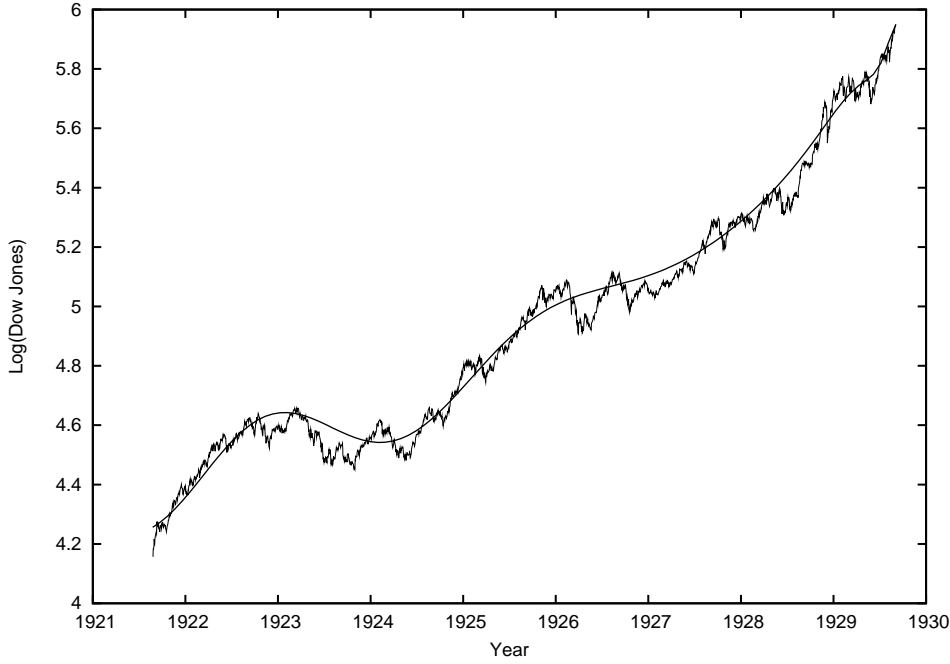


Figura 5.1: Andamento del logaritmo dell'indice Dow Jones dal giugno 1921 al settembre 1929 e miglior fit con la (5.5). Il crash del 23 ottobre 1929 corrisponde a 1929.81 in anni decimali. I parametri del fit sono: r.m.s. = 0.041, $t_c = 1929.84$, $\beta = 0.63$, $\omega = 5.0$, $\Delta\omega = -70$, $\Delta t = 14$, $A = 61$, $B = -0.56$, $C = 0.08$. Tratto da [35].

con $\tau = t/\phi$ e dove sono stati introdotti due nuovi parametri: Δ_t e Δ_ω . Questa espressione descrive due nuovi effetti: (i) lontano dal punto critico la legge a potenza si stempera; (ii) la 'log-frequenza' passa da $\frac{\omega + \Delta_\omega}{2\pi}$ a $\frac{\omega}{2\pi}$ mentre ci avviciniamo al punto critico. Entrambi questi cross-over avvengono in un intervallo di tempo Δ_t prima del punto critico. Questa espressione è stata utilizzata per fittare i prezzi prima dei crash dell'87 e del '29 per periodi più lunghi, circa 8 anni prima (vedi fig. 5.1 per il fit del crash del '29); in questi casi ciò è indice che la cooperazione nel mercato che poi è sfociata nel crash abbia cominciato a originarsi, a indirizzare la dinamica verso il punto critico con largo anticipo.

La cosa che qui interessa sottolineare è che la derivazione della (5.5) è ottenuta senza fare riferimento ad alcun modello specifico, ma solo analizzando la struttura della (5.1), cioè invocando solo l'invarianza di scala discreta che emerge nel mercato quando attraversa un punto critico. In realtà per arrivare alla (5.5) Sornette e Johansen utilizzano una versione più avanzata della (5.1); questa, infatti, può essere vista, insieme a $x \rightarrow \lambda x$, come la

linearizzazione vicino al punto critico di

$$x' = \phi(x) \quad (5.6)$$

$$\mathcal{O}(x) = g(x) + \mu \mathcal{O}(\phi(x)) \quad (5.7)$$

Queste rappresentano le equazioni del gruppo di rinormalizzazione; esse dicono come cambia l'osservabile \mathcal{O} nell'intorno del punto critico quando il parametro di controllo subisce la trasformazione $\phi(x)$, chiamata mappa del gruppo di rinormalizzazione. La funzione $g(x)$ è la parte regolare dell'osservabile; essa incorpora gli effetti dei gradi di libertà microscopici che vengono sommati via quando si effettua la trasformazione del gruppo di rinormalizzazione. Nella (5.1) il termine $g(x)$ è trascurato. Quello che si fa quando si utilizza il gruppo di rinormalizzazione per un sistema è di cercare di individuare la mappa $\phi(x)$, o linearizzarla, e la funzione regolare $g(x)$ per cui le (5.6) e (5.7) sono valide nell'intorno del punto critico.

5.2 Ampiezza delle oscillazioni

Come si è visto nella sezione 2.1 nei fit sui dati reali l'ampiezza delle oscillazioni è dell'ordine del 10%. Come abbiamo accennato più volte tali oscillazioni si trovano in molti altri sistemi e, in generale, dove ci sia invarianza di scala discreta. Però, a volte, come in alcuni sistemi di spin con interazioni ferromagnetiche su geometrie gerarchiche [30], l'ampiezza di queste oscillazioni è molto piccola, dell'ordine di 10^{-4} volte il termine a potenza. Ora, seguendo Gluzman e Sornette [14], accenneremo al perché di questa differenza di vari ordini di grandezza, anche se otterremo dei risultati solo da un punto di vista formale. Infatti, l'ampiezza delle oscillazioni, vedremo, è dettata dalle proprietà della funzione regolare $g(x)$, ma per il mercato non sappiamo ancora che significato attribuire ad essa. Per il sistema rappresentato dal mercato finanziario il gruppo di rinormalizzazione è ancora solamente un utile strumento formale per fare i calcoli; non conosciamo la fisica che ci sta dietro, ovvero non sappiamo come è fatta la mappa $\phi(x)$. Detto questo, vediamo come si fa a trovare le ampiezze dei termini dell'espansione di Fourier.

La soluzione formale delle (5.6) e (5.7) è data da

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n g[\phi^{(n)}(x)] \quad , \quad (5.8)$$

dove $\phi^{(n)}$ è l' n -esimo iterato della mappa ϕ . Nei pressi del punto fisso $\phi(x_c) = x_c = 0$ possiamo espandere ϕ , supposta differenziabile, in serie di Taylor e

tenere solo il primo termine, $\phi(x) = \lambda x$. La (5.8) diventa

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n g[\lambda^n(x)] \quad . \quad (5.9)$$

Seguendo Gluzman e Sornette [14] si può riscrivere la serie infinita in (5.9) in un modo più conveniente. I passi da effettuare sono questi:

1. si applica a (5.9) la trasformata di Mellin definita in questo modo

$$\hat{f}(s) \equiv \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \quad , \quad (5.10)$$

2. si riespande la serie ordinandola rispetto ai poli della trasformata di Mellin di \mathcal{O} nel piano complesso,
3. si effettua la trasformata inversa per ottenere un'espansione di \mathcal{O} in termini di potenze di x .

Il risultato è che \mathcal{O} può essere scritta come la somma di una parte singolare e di una regolare:

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_s(x) + \mathcal{O}_r(x) \quad , \quad (5.11)$$

dove

$$\mathcal{O}_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-s_n} \quad , \quad (5.12)$$

con

$$A_n = \frac{\hat{g}(s_n)}{\ln \lambda} \quad , \quad (5.13)$$

e

$$s_n = m + i \frac{2\pi}{\ln \lambda} n \quad , \text{ con } m = \frac{\ln \mu}{\ln \lambda}. \quad (5.14)$$

I coefficienti A_n controllano i rapporti tra le correzioni log-periodiche (determinate dalla parte immaginaria degli esponenti s_n) e il termine dominante a potenza con $n = 0$. La parte regolare $\mathcal{O}_r(x)$ non presenta singolarità per $x = 0$, dunque non viene considerata.

In [14] si mostra come, per una vasta classe di sistemi, i coefficienti A_n possano essere scritti come il prodotto di un termine che decade esponenzialmente per un termine a potenza e una fase

$$A_n = \frac{1}{\ln \lambda} \frac{1}{n^p} e^{-kn} e^{i\psi_n} \quad \text{per grandi } n, \quad (5.15)$$

dove $p, k \geq 0$ e ψ_n sono determinati dalla forma di $g(x)$ e dai valori di μ e λ . In [14] viene dimostrato come per sistemi che hanno $g(x)$ periodica e/o

a supporto compatto i termini A_n decadono a potenza $A_n \sim n^{-p}$ portando a forti correzioni log-periodiche. Questo risultato, insieme all'analisi dei dati reali, ci spinge a ipotizzare per la $g(x)$ del mercato una struttura del genere, ma il perché, fisicamente, la $g(x)$ debba essere periodica e/o avere il supporto compatto, non lo sappiamo. Per scoprirlo bisognerebbe identificare chiaramente quali sono i meccanismi sottostanti all'emergenza dell'invarianza di scala discreta nel mercato e derivare le equivalenti equazioni del gruppo di rinormalizzazione.

Capitolo 6

Analisi dei drawdowns

6.1 Motivazioni

Il nostro obiettivo, in questo e nel prossimo capitolo, è di cercare la presenza di LPPL precedenti ai crash nei dati ad alta frequenza (intraday) e di studiarne le caratteristiche in relazione alle proprietà trovate in letteratura su queste strutture a più grande scala (universalità, appartenenza ad un'unica classe di fenomeni).

Abbiamo visto prima che in un sistema l'invarianza di scala discreta può emergere in diversi modi, geometrici o dinamici. Secondo noi, la scoperta di crash preceduti da LPPL nella frequenza intraday con caratteristiche simili a quelli a larga scala sarebbe un punto a favore dell'ipotesi sulla natura geometrica di tale simmetria. Questo perché la geometria gerarchica degli operatori, supposta alla base dell'emergenza dell'invarianza di scala discreta, non cambia a seconda della scala a cui effettuiamo le osservazioni, mentre cambia la dinamica che guida il processo di formazione dei prezzi. Alla scala analizzata nei lavori di Sornette, in cui l'elemento di base è l'informazione sul prezzo giornaliero, buona parte del rumore presente nei dati viene eliminato con questa sorta di operazione di coarse-graining, per cui tutta l'informazione che giunge nel corso della giornata viene filtrata e concentrata in un unico punto, cioè il prezzo di giornata. Gli operatori sono, quindi, in grado di agire, se così si può dire, sull'informazione che conta, mentre a livello intraday agiscono spesso sul rumore. La dinamica dei prezzi a grande scala è, quindi, diversa in quanto filtra il rumore.

È diversa anche in un altro modo: in un trading a grande scala gli operatori hanno più tempo per fare le proprie analisi, sentire il parere dei propri vicini, far crescere la fiducia verso una particolare scelta di investimento e, infine, entrare nel mercato. Nel trading intraday, al contrario, i tempi sono

più ristretti; prendiamo la dinamica (4.1): gli operatori non hanno materialmente il tempo di formulare ad ogni istante t le operazioni di assimilazione dell'informazione ϵ_i , selezione delle diverse strategie $s_i(t)$, ricezione dell'informazione sulle scelte $\sum_{j \in N_i} s_j(t)$ dei propri vicini e scelta dello stato $\bar{s}_i(t)$. Quindi, la dinamica (4.1) non viene implementata correttamente nel trading intraday; per questo ci aspettiamo, se è questo il meccanismo che genera le LPPL, di trovare meno evidenza dell'esistenza di tali strutture rispetto all'analisi di Sornette. D'altra parte, abbiamo anche detto che la specificità di un particolare modello non dovrebbe essere influente sull'emergere della criticità e della log-periodicità, finché si rispettano delle condizioni generali, per cui l'eventuale forte evidenza di tali strutture dovrebbe essere di stimolo per lo sviluppo di un modello con una dinamica anche diversa rispetto alla (4.1), ma implementabile nel trading intraday.

Il lavoro è stato svolto in tre fasi: una fase preliminare che consiste nel ripulire i dati grezzi che avevamo a disposizione; individuazione degli eventi candidati ad essere interpretati come il risultato dell'attraversamento di un punto critico da parte del sistema; ricerca della presenza, ed eventuale classificazione, di accrescimenti a potenza decorati da log-periodicità nei prezzi all'approssimarsi di tali eventi.

6.2 Descrizione del campione

I dati analizzati si riferiscono al mercato italiano dei futures (FIB30). Per i nostri scopi non è importante specificare cosa è un contratto futures; basti sapere che è una tipologia di contratto finanziario, il cui valore dipende dal valore di un bene sottostante, il quale è trattato in borsa alla stessa stregua di altri contratti (azioni, obbligazioni, etc.), per cui il processo di formazione del prezzo è determinato dalla domanda e dall'offerta, come in qualunque altro contratto. Nel caso del FIB30 il bene sottostante è costituito dal paniere dei 30 titoli a maggiore capitalizzazione della borsa di Milano che compongono l'indice MIB30. La scelta di questo mercato non è stata dettata dalla volontà di ottimizzare la ricerca delle LPPL, non pensiamo che si tratti del mercato per cui è massima la probabilità di trovare tali strutture, ma dalla pura necessità: è il solo mercato per cui siamo venuti in possesso di dati a così alta frequenza. Vediamo, dunque, vantaggi e svantaggi di tale scelta.

Il grosso svantaggio è che il mercato italiano, probabilmente, non è il più adatto a generare la log-periodicità con le caratteristiche di universalità ritrovate da Sornette per altri mercati. Come abbiamo visto nel paragrafo 2.2 l'universalità è forte, almeno alla scala temporale analizzata da Sornette, nei mercati cosiddetti evoluti, a grossa capitalizzazione e strettamente rego-

lamentati. Il mercato italiano ammonta per solo il 2% della capitalizzazione mondiale delle borse, è, quindi, decisamente un mercato minore e potrebbe risentire di questi ‘effetti di bordo’ anche nell’analisi ad alta frequenza; per questo ci aspettiamo sicuramente una non netta evidenza dell’universalità dei parametri nelle strutture che, eventualmente, incontreremo. Il vantaggio di usare, nell’ambito del mercato italiano, il FIB30 rispetto ad altri indici è dato dal fatto che si tratta sicuramente del più trattato, sia in termini di capitalizzazione che di liquidità. Il vantaggio di usare un indice rispetto ai singoli componenti del paniere è sempre la maggiore liquidità.

Il data-set consiste in tre anni di dati tick-by-tick, ovvero contenenti l’informazione di ogni singola transazione, dall’11/1/2000 al 31/12/2002, per un totale di 751 giorni. Abbiamo tutte le transazioni, ma abbiamo considerato solo quelle relative ai contratti in scadenza (il FIB30 ha scadenze ogni 4 mesi), ignorando i contratti con scadenze più avanti nel tempo. Questo perché il contratto più trattato è quello prossimo alla scadenza e considerare anche tutti gli altri avrebbe portato a improvvise discontinuità nei prezzi, dovute al fatto che i prezzi di un contratto futures sono influenzati dal tempo mancante alla scadenza.

Abbiamo considerato le contrattazioni dalle 9.15 alle 17.30 ora italiana, per un totale di 8.657.949 transazioni (in media 11.528 al giorno, con una *duration*¹ media tra i contratti di 2,61 secondi).

Quando si tratta con dati ad alta frequenza ci sono delle operazioni preliminari da fare sui dati per ripulirli di inutili discontinuità e di parte del rumore. Abbiamo già detto che vanno tolti i dati relativi alle transazioni sui contratti a maggiore scadenza, ma anche sui restanti va effettuata una ripulitura. Succede, a volte, che un contratto venga stipulato ad un prezzo molto diverso rispetto a tutti gli altri in un piccolo intervallo di tempo per inefficienze dovute al sistema di gestione degli ordini; per cui, capita ogni tanto che un contratto venga chiuso ad un prezzo lontano dal valore che ha l’asset in quel momento. Questi devono essere eliminati, per non introdurre dannose discontinuità nelle serie. Abbiamo tolto quei contratti per cui si ha una variazione in valore assoluto di 200 punti indice rispetto al valore del contratto precedente². Fatto questo, bisogna raggruppare tutti i contratti relativi ad un unico secondo di contrattazioni e assegnare il prezzo valido per quel secondo. Ciò è stato fatto semplicemente prendendo la media dei prezzi di stipula dei contratti di tutte le transazioni avvenute in quel secondo pesata con il volume dei contratti di ogni transazione. Siamo arrivati così ad

¹La *duration* è l’intervallo di tempo che intercorre tra la stipula di due contratti consecutivi.

²Nell’arco di tempo considerato il valore del FIB30 si aggira tra i 25.000 e i 50.000 punti indice.

ottenere un file con i dati relativi al prezzo e al volume delle contrattazioni in funzione di ogni secondo in cui è avvenuta almeno una transazione.

Questi dati, però, non possono essere ancora utilizzati perché non sono equispaziati; non in tutti i secondi avviene una transazione: si è detto che la *duration* media è di 2.61 secondi. A questo punto si è dovuta operare una scelta dell'intervallo di tempo con cui equispaziare i dati. Prima di tutto, noi abbiamo considerato i giorni come entità distinte e indipendenti. Questo per un motivo molto ovvio: vogliamo analizzare il mercato alla frequenza dell'intraday; in questo caso la dinamica del sistema subisce una brusca interruzione alla chiusura giornaliera, quando nuova informazione viene assimilata dagli operatori, la quale verrà tradotta nei prezzi solo all'apertura successiva, generando dannose discontinuità. Per cui, la nostra statistica è costituita da 751 casi indipendenti, i giorni, per ognuno dei quali, dopo aver verificato che sussistano le condizioni per generare le strutture LPPL, analizziamo la serie temporale della giornata per, eventualmente, individuarle.

All'interno della giornata, la scelta dell'intervallo da utilizzare per equispaziare i dati è stata dettata da due considerazioni: da un lato la necessità di eliminare o ridurre le correlazioni nei prezzi presenti per dati ad alta frequenza e gli effetti di microstruttura, dall'altro mantenere una ricca statistica. La necessità di ridurre la correlazione tra i prezzi in istanti vicini è dettata dal fatto che, nella ricerca dei 'minicrash' candidati ad essere il risultato della fine di un andamento LPPL nei prezzi, andiamo proprio alla ricerca dei momenti in cui è presente una forte correlazione, per cui vorremmo che le nostre serie temporali siano costituite da punti i più indipendenti possibile, dato che siamo interessati proprio a eventuali bursts di cooperatività nel mercato, che si manifestano come forte correlazioni temporanee nei prezzi. La necessità di avere serie temporali con una ricca statistica è dettata dal fatto di poter essere in grado tecnicamente di fittare la serie con l'andamento proposto. Se la serie ha pochi punti il fit non può considerarsi significativo.

Purtroppo, non è possibile scegliere un intervallo temporale tale da rendere trascurabile la funzione di autocorrelazione dei prezzi. Bianco e Renò [4], utilizzando lo stesso data-set, hanno mostrato che su questo campione, la correlazione sui prezzi nella giornata va a zero con un cut-off di circa 5 minuti. Noi però non possiamo scegliere un intervallo di tempo così grande per equispaziare i dati perché avremmo a disposizione una statistica ridotta, circa 100 punti per giornata, troppo pochi per poter identificare gli andamenti cercati. Nei dati di Sornette le bolle durano dai 100 ai 500 e più giorni, cioè durano altrettanti intervalli di tempo elementari. Per far rientrare 500 punti in una giornata dobbiamo prendere l'intervallo di tempo elementare corrispondente ad almeno un minuto. Abbiamo scelto esattamente un minuto, con cui si hanno 495 punti per giornata, perché per intervalli inferiori intervengono

altri fenomeni, oltre alla presenza di una certa correlazione nei prezzi, detti di microstruttura, altamente indesiderati. I fenomeni di microstruttura sono fenomeni legati al meccanismo con cui avviene nello specifico la formazione del prezzo per ogni contratto, cioè all'esistenza di market makers e di prezzi bid e ask e introducono, per tempi molto piccoli, una forte componente di correlazione negativa dovuta al 'bid-ask bouncing effect'³, che vogliamo assolutamente eliminare. Nello stesso lavoro, Bianco e Renò hanno dimostrato che sul nostro data-set una buona scelta per eliminare la correlazione dovuta agli effetti di microstruttura è un intervallo temporale per equispaziare i dati di un minuto. Quindi, questa scelta ci è sembrata il miglior compromesso tra queste diverse necessità.

6.3 Drawdowns

6.3.1 Distribuzione cumulativa

Una volta ripuliti, i dati sono pronti per essere sottoposti all'analisi. Ora il data-set è diventato un file con i dati sui prezzi e sui volumi per ogni minuto dalle 9.15 alle 17.30 per 751 giorni, per un totale di 371.745 punti. A questo punto, il primo passo da compiere è identificare quali tra questi 751 giorni, tra queste 751 serie temporali da 495 minuti l'una, sono i candidati ad ospitare la presenza di andamenti a potenza decorati da oscillazioni log-periodiche nei periodi precedenti un crash. Bisogna, quindi, identificare i crash di giornata che corrispondono a bursts di correlazione nei prezzi. Per fare ciò, seguiamo il procedimento di Sornette: prendiamo tutto il data-set a nostra disposizione, calcoliamo la distribuzione cumulativa dei drawdowns e verifichiamo se i più grandi hanno proprietà diverse rispetto al resto della distribuzione; in tal caso questi saranno i nostri candidati.

I drawdowns sono definiti come la variazione percentuale totale *negativa* del prezzo tra un massimo locale e il successivo minimo locale; un drawdown si interrompe non appena si incontra un rendimento positivo; la durata del drawdown non è fissa: è costituita dal numero di intervalli elementari consecutivi (nel nostro caso della durata di un minuto ciascuno) per cui il rendimento rispetto all'istante di tempo precedente è negativo. Nella costruzione della distribuzione dei drawdowns non teniamo conto delle variazioni di prezzo tra l'apertura e la chiusura del giorno precedente. Quindi la distribuzione è stata calcolata su una serie di $371.745 - 751 = 370.094$ rendimenti ad un minuto.

³Il 'bid-ask bouncing effect' è quel fenomeno per cui se l'ultimo contratto è stato stipulato al prezzo bid, è probabile che il prossimo venga concluso al prezzo ask, e viceversa.

Il risultato è mostrato in fig. 6.1. Il numero totale di drawdowns ricavati dalla serie originale dei rendimenti è 91.620. In figura è mostrata anche la distribuzione cumulativa complementare dei drawups, definiti come una successione di variazioni di prezzo *positive*.

Queste due distribuzioni sono state fittate con la funzione

$$N_c(x) = A \exp(-(|x|/\chi)^z), \quad (6.1)$$

dove x è indipendentemente un drawdown o un drawup. $N_c(x)$ rappresenta un esponenziale allungato per $z < 1$; $z = 1$ è il caso dell'esponenziale puro; $z > 1$ definisce le cosiddette funzioni super-esponenziali. Abbiamo visto nel paragrafo 3.2 che Johansen e Sornette [19] hanno dimostrato che per variazioni di prezzo indipendenti x la distribuzione dei drawdowns è asintoticamente un'esponenziale se la distribuzione di x non va a zero più lentamente di un esponenziale; per le distribuzioni sub-esponenziali (funzioni di Lèvy, leggi a potenza, esponenziali allungati) invece, la coda della distribuzione dei drawdowns è la stessa della distribuzione di x .

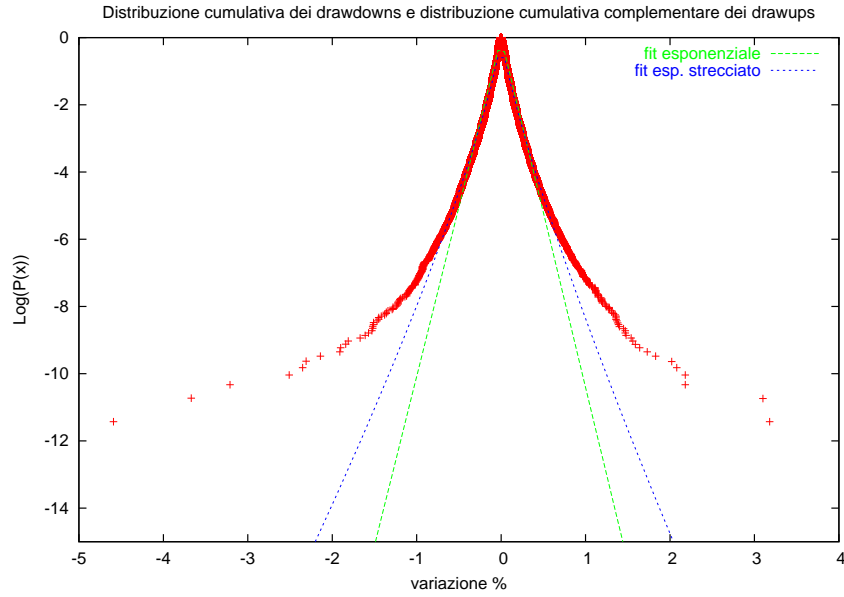


Figura 6.1: Distribuzione cumulativa dei drawdowns e distribuzione cumulativa complementare dei drawups costruite come specificato nel testo. I parametri del fit esponenziale sono: per i drawdowns $1/\chi = 10.08 \pm 0.02$ r.m.s. = 0.097; per i drawups $1/\chi = 10.41 \pm 0.02$ r.m.s. = 0.074. I parametri del fit con l'esponenziale allungato sono: per i drawdowns $z = 0.80 \pm 0.01$, $1/\chi = 13.41 \pm 0.05$ r.m.s. = 0.024; per i drawups $z = 0.82 \pm 0.01$, $1/\chi = 13.34 \pm 0.05$ r.m.s. = 0.022.

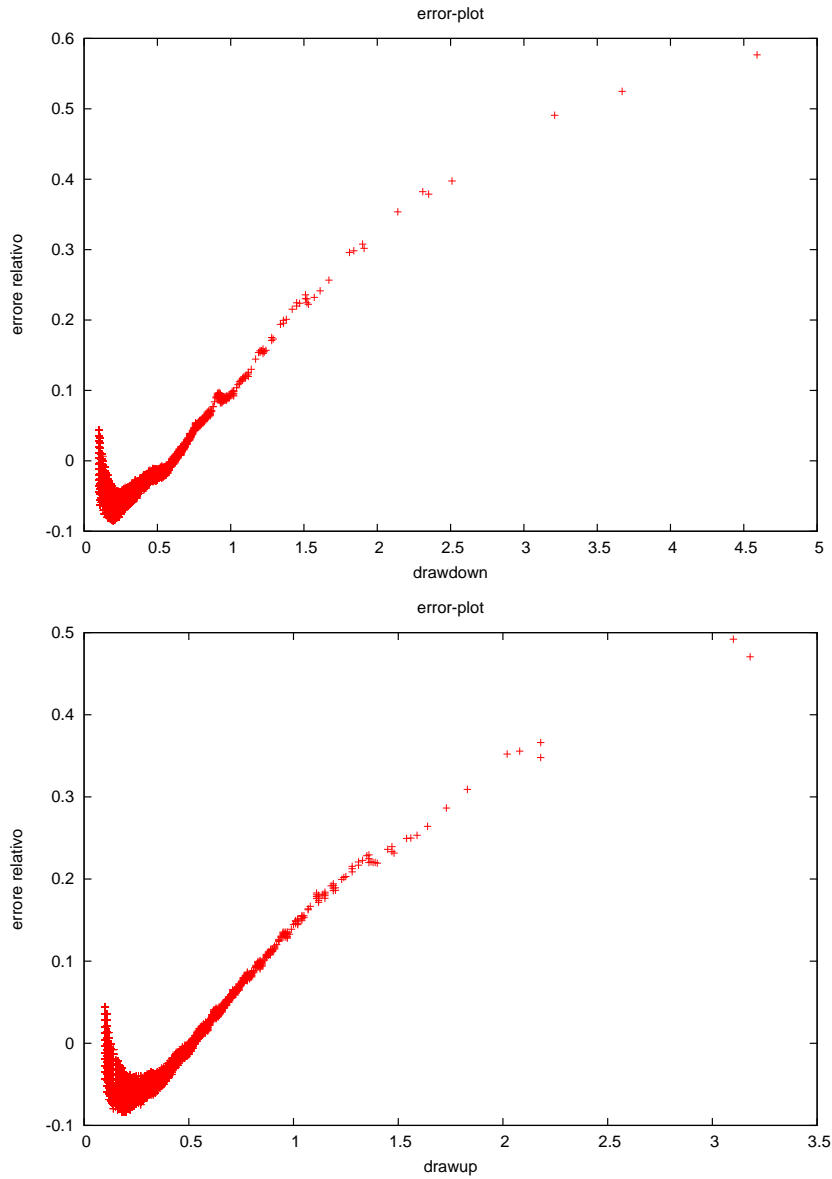


Figura 6.2: Alto: errore relativo della distribuzione cumulativa dei drawdowns con il miglior fit ottenuto con un esponenziale allungato. Basso: lo stesso per i drawups. 0.1 indica il 10%.

Anche in questo caso, come per i dati a bassa frequenza studiati da Sornette, il miglior fit dà un esponenziale allungato ($z = 0.8 \pm 0.01$ per i drawdowns e $z = 0.82 \pm 0.01$ per i drawups). La differenza è che nei dati a bassa frequenza il fit va molto meglio, in questo senso: si confrontino le figure 6.2 (alto) e 3.3 dei plot degli errori relativi del fit. Nella fig. 3.3 si nota che

per i drawdowns minori del 15% il fit è buono, infatti l'errore relativo è ora positivo, ora negativo e questo era interpretato come la validità dell'ipotesi di indipendenza dei rendimenti giornalieri nei momenti in cui si formano tali drawdowns di bassa intensità. Poi c'è un passaggio netto (la divisione è quasi verticale) tra la zona dei drawdowns fittati molto bene dalla (6.1) e il regime di quelli maggiori, nettamente distanti dal fit. Da qui si ricavava l'idea che i grandi drawdowns fossero 'outliers', cioè si generassero non con il meccanismo di formazione di quelli più piccoli, cioè il caso, ma a causa di forti correlazioni tra i rendimenti giornalieri presenti in quei momenti.

Nella fig. 6.2, invece, si nota una deviazione sistematica dei drawdowns dal fit, con l'errore relativo che prima scende e poi risale: i drawdowns di piccola intensità avvengono con minore frequenza del previsto, poi c'è un'inversione di tendenza e man mano che incontriamo drawdowns più grandi questi avvengono con frequenza maggiore del previsto e non c'è una separazione netta tra i due regimi (come si vede, da un certo punto l'errore relativo aumenta in maniera pressoché lineare con pendenza ≈ 1 , mentre per i dati a bassa frequenza era verticale). Questa deviazione si spiega facilmente con il fatto che non è rispettata l'ipotesi di partenza dell'indipendenza tra rendimenti a un minuto, in nessun momento, né nei periodi in cui si formano drawdowns di bassa intensità né, ovviamente, quando si generano drawdowns molto grandi. È comunque, notevole che, nonostante la caduta dell'ipotesi di indipendenza dei rendimenti, oltre il 99.9% dei drawdowns, quelli minori dell'1% si trovano entro un errore del 10% dal fit. Questo ci dice che, per quasi tutta la durata dell'arco di tempo di tre anni utilizzato nello studio, la correlazione tra i prezzi alla scala del minuto è molto bassa. È solo in alcuni momenti che scoppiano dei bursts di correlazione per dare origine a drawdowns dal valore decisamente più grande rispetto a quello che si può prevedere nell'ipotesi in cui tale valore sia determinato dalla debole correlazione media presente nei dati alla frequenza di un minuto.

A questo punto Sornette, come abbiamo visto, per testare in modo non parametrico l'ipotesi che i grossi drawdowns siano outliers, rimescola i dati e studia queste serie surrogate. Questo metodo è impraticabile per le frequenze intraday. Infatti, rimescolando i dati, otteniamo delle serie in cui le variazioni di prezzo sono indipendenti; sui dati a bassa frequenza queste si possono confrontare con la serie originale perché anche per questa l'ipotesi di indipendenza è quasi sempre soddisfatta, tranne che per i punti che si vogliono evidenziare; per le frequenze intraday, queste non si possono confrontare con l'originale perché in questa la correlazione dei prezzi è sempre presente, dunque ci troveremmo a confrontare delle serie con caratteristiche diverse.

6.3.2 Drawdowns e drawups simmetrici

In questi dati ad alta frequenza un'altra differenza riscontrata con i dati di Sornette è la simmetria tra drawups e drawdowns. Si è visto nel paragrafo 3.2 che nei dati a bassa frequenza Sornette trova una generale asimmetria tra drawups e drawdowns, nel senso che questi ultimi presentavano, in ogni mercato analizzato, la separazione tra due classi: quella del bulk della distribuzione e quella degli outliers; mentre per i drawups l'attribuzione dello stato di outliers e la separazione tra le due classi era riscontrabile solo in metà dei mercati analizzati.

Il quadro che ne veniva fuori è che per i grandi drawups anche la semplice correlazione media presente nei prezzi è un meccanismo di formazione altrettanto valido quanto i bursts di correlazione. A quella scala i bursts di correlazione sembrano essere associati a correzioni verso il basso degli indici, piuttosto che ad apprezzamenti, i quali, invece, avvengono con tempi caratteristici più lunghi. Questo è ben noto: a grande scala il mercato è molto asimmetrico e presenta un chiaro drift positivo, dovuto alla svalutazione dei prezzi e al fatto che nel lungo termine l'economia cresce (almeno così è stato in passato); ha, cioè, una direzione privilegiata, verso l'alto, interrotta ogni tanto da brusche correzioni verso il basso.

A grandi frequenze, invece, il mercato è molto più simmetrico, non ha un drift specifico: in alcune serie storiche cresce, ma prendendo un altro campione la situazione può invertirsi. Si può fare un'analogia con i sistemi termodinamici, i quali, a livello microscopico sono reversibili, ma perdono tale caratteristica nel passaggio a scale più grandi. Si intuisce facilmente il motivo per cui alle alte frequenze il mercato debba essere più simmetrico: gli effetti dell'inflazione dei prezzi e la crescita dell'economia sono insignificanti e a governare la dinamica dei prezzi è principalmente l'arrivo delle notizie, che è supposto random. Segni di tale simmetria sono stati trovati anche nella nostra analisi; vediamo quali sono:

- le figure 6.1 e 6.2 sono decisamente simmetriche rispetto ai drawdowns e ai drawups; il numero di drawdowns e drawups che si formano dalla serie dei 371.745 rendimenti è, rispettivamente, 91.620 e 92.006, uguali allo 0.05%; i parametri dei fit delle due distribuzioni con la (6.1) sono praticamente uguali: $z = 0.80 \pm 0.01$, $1/\chi = 13.41 \pm 0.05$ per i drawdowns e $z = 0.82 \pm 0.01$, $1/\chi = 13.34 \pm 0.05$ per i drawups. Abbiamo poi suddiviso il campione di tre anni di dati in 36 sottocampioni, corrispondenti ai mesi, per vedere se questi parametri e la simmetria fossero stabili nel tempo e abbiamo ripetuto la costruzione della distribuzione cumulativa per ogni singolo sottocampione; i risultati sono nelle figure 6.4 e 6.3. Nella 6.4 si vede il valore di z per i drawdowns e i drawups

nei rispettivi campioni; con questi si è costruita la distribuzione del parametro z , mostrata nella fig. 6.3 per i drawdowns e per i drawups. Fittandole con una gaussiana si ottiene il valore di $z = 0.89 \pm 0.1$ per i drawdowns e $z = 0.9 \pm 0.1$ per i drawups (gli errori sono a 2σ). Quindi, i valori per z ottenuti con questo metodo sono compatibili con quelli ottenuti utilizzando la distribuzione cumulativa di tutto il campione e presentano anche essi una forte simmetria per drawups e drawdowns.

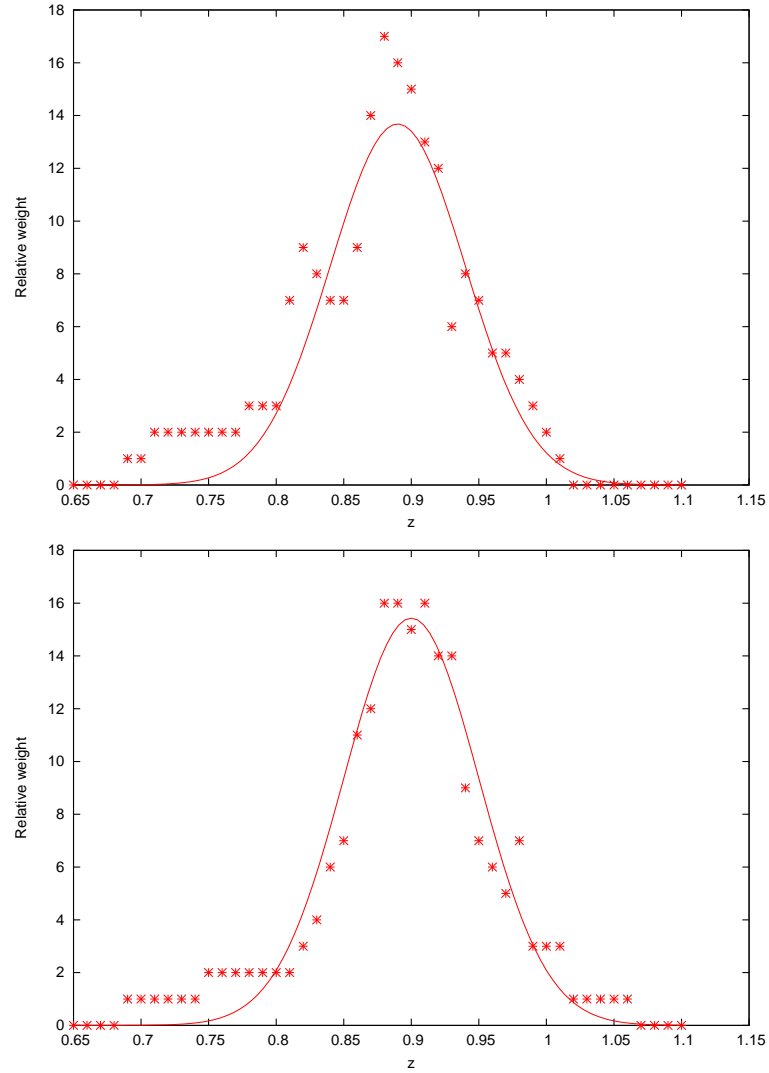


Figura 6.3: Alto: distribuzione empirica del parametro z ottenuto dai 36 sottocampioni della fig.6.4 per i drawdowns. Il fit è con una gaussiana e dà: $\mu = 0.89 \pm 0.01$, $\sigma = 0.05 \pm 0.01$ r.m.s.= 2.2. Basso: lo stesso per i drawups: $\mu = 0.90 \pm 0.02$, $\sigma = 0.05 \pm 0.01$ r.m.s.= 1.26.

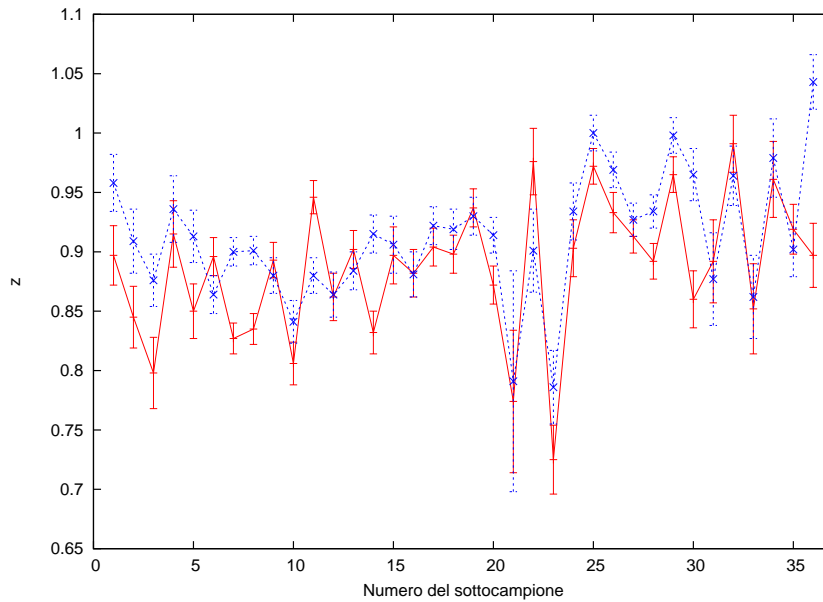


Figura 6.4: Linea rossa: valore del parametro z del miglior fit con la (6.1) della distribuzione cumulativa dei drawdowns di ogni singolo mese, costruita come indicato nel testo. Linea blu: lo stesso per i drawups.

- La simmetria è evidente anche dalla figura 6.5. In essa è mostrata la media del valore di drawdowns e drawups nell'arco della giornata, calcolata su intervalli di 10 minuti. Si nota l'andamento assolutamente identico: si registrano valori molto alti a inizio seduta (ovvio, perché è dalla chiusura precedente che il mercato non ha la possibilità di processare la nuova informazione acquisita, dunque è costretto a farlo bruscamente al momento dell'apertura delle contrattazioni), poi scendono toccando il minimo tra le ore 12 e le 14, quando presumibilmente molti operatori sono a pranzo, hanno un primo picco alle 14:30 (a New York sono le 8:30 del mattino, un'ora prima dell'apertura di Wall Street; è in quest'istante, a mercati americani chiusi, che spesso vengono comunicati importanti dati macroeconomici), per poi raggiungere valori molto alti dopo le 15:30, orario di apertura di Wall Street. Questi andamenti potrebbero far supporre che la dinamica del mercato italiano, guidata da meccanismi interni, sia spesso sovrastata e influenzata da eventi esogeni, legati all'evoluzione di Wall Street. Potrebbe darsi che la dinamica dell'evoluzione del mercato italiano subisca un cambiamento a seconda che Wall Street sia aperta o chiusa, quasi come se ci fosse una sorta di parametro 'WS' che, attivandolo o disattivandolo, porti una discontinuità e modifichi la struttura della dinamica. Molto pro-

tabilmente questo avrà delle conseguenza nella nostra ricerca di crash preceduti da LPPL.

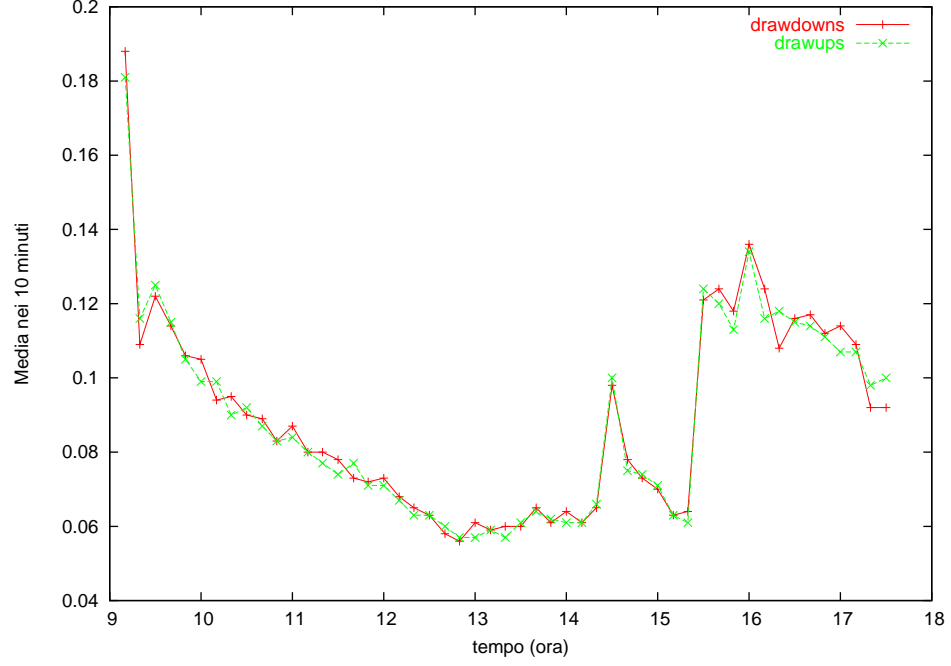


Figura 6.5: Linea rossa: valore medio dei drawdowns su una finestra di 10 minuti, mediato sui 751 giorni del campione. Linea verde: lo stesso per i drawups. Il tempo è misurato in ore.

Quindi, al contrario del mercato visto alle basse frequenze, a piccola scala tanto i grandi drawdowns quanto i grandi drawups sono dovuti a bursts di correlazioni temporanee; probabilmente questo si rifletterà in una minore evidenza di crash con strutture LPPL, in quanto questa simmetria potrebbe riflettere una comune origine sia per le grandi variazioni di prezzo negative che positive. Infine, un'ulteriore evidenza che i grandi drawdowns sono dovuti a temporanei bursts di correlazione è data dalla comparazione tra l'occorrenza dei drawdowns e la volatilità media della giornata. Questa è definita in questo modo: seguendo [24] definiamo la volatilità del giorno i -esimo come $V_{D_i}(t) \equiv \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T |G(t+j)|$, dove G è la differenza percentuale dei prezzi con l'istante precedente, nel nostro caso 1 minuto e T è la dimensione della finestra su cui è calcolata la volatilità, in questo caso 10 minuti. La volatilità media della giornata è

$$V(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_{D_i}(t) \quad (6.2)$$

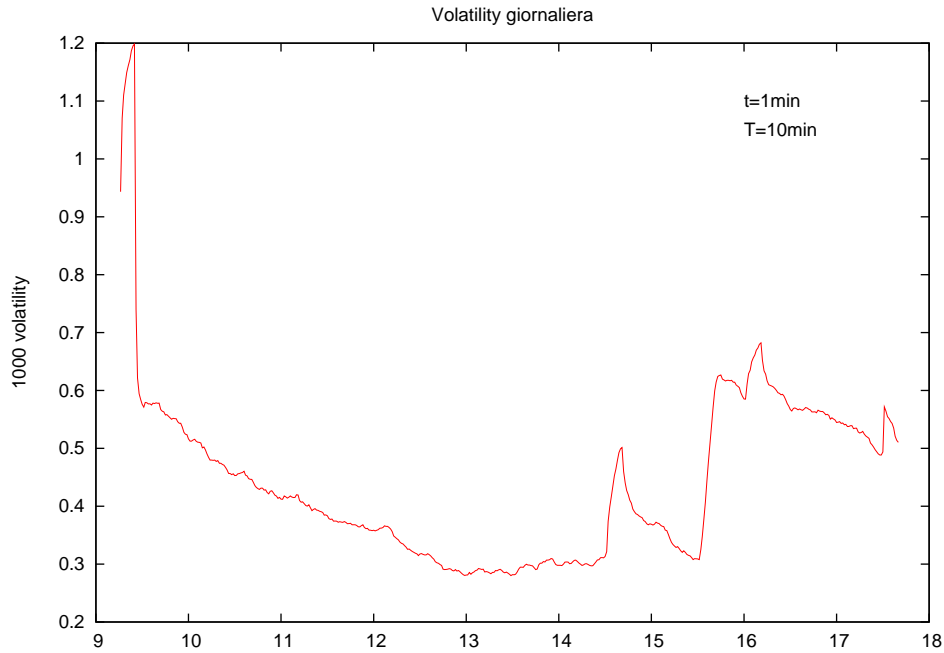


Figura 6.6: Volatilità media della giornata, come definita nel testo, calcolata per ogni minuto su una finestra di 10 minuti. Il tempo è misurato in ore.

dove N è il numero di giorni del campione, ovvero 751. In figura 6.6 è mostrato l'andamento della volatilità media nel corso della giornata; è evidente la somiglianza con la fig. 6.5, catturata anche dallo scatter-plot mostrato in fig. 6.7: la volatilità media e la media dei drawdowns nel corso della giornata sono due quantità perfettamente correlate. Se però nello scatter-plot ci limitiamo a considerare la media costruita con i soli drawdowns più grandi, in questo caso maggiori di 0.8, che è il punto in cui il fit comincia a deviare dalla distribuzione, allora, come si vede dalla figura 6.8, tale correlazione scompare. I grandi drawdowns avvengono indipendentemente dal grado di volatilità del mercato.

Il prossimo passo è, ora, quello di analizzare i giorni in cui sono presenti i drawdowns più grandi, dovuti a bursts di correlazione, per capire se e in quanti casi questi bursts siano anticipati da LPPL, segno dell'attraversamento da parte del sistema di un punto critico e della presenza di invarianza di scala discreta.

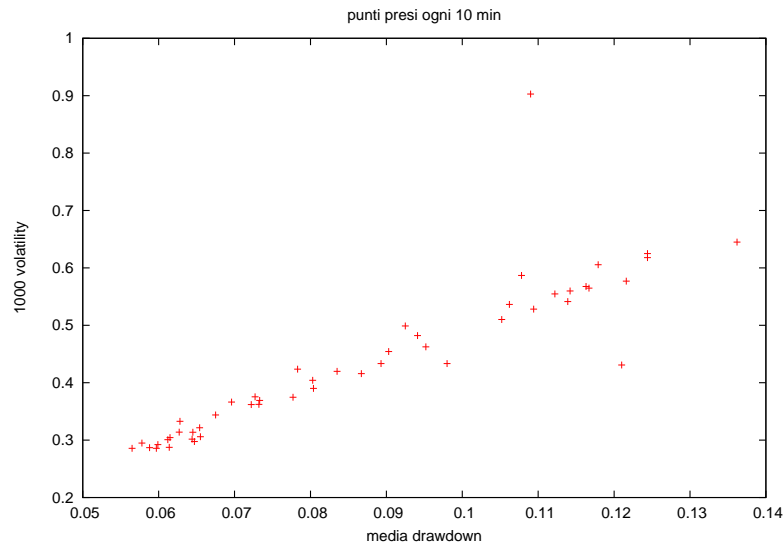


Figura 6.7: Scatterplot: sulle x c'è il valor medio di tutti i drawdowns su una finestra di 10 minuti, mediato sui 751 giorni del campione; sulle y c'è il valore della volatilità media della giornata, definita nel testo, all'inizio dello stesso intervallo. I punti sono 49, quanti sono gli intervalli di 10 minuti nella giornata di contrattazioni.

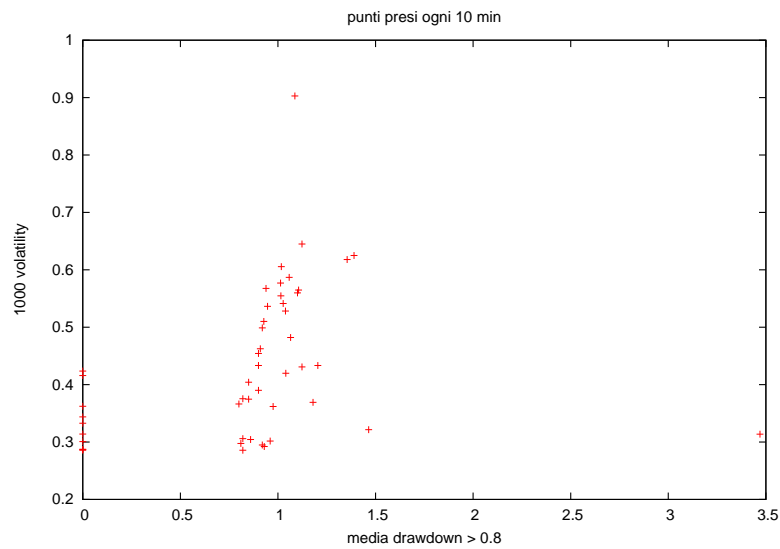


Figura 6.8: Scatterplot: sulle x c'è il valor medio costruito con i soli drawdowns maggiori di 0.8 su una finestra di 10 minuti, mediato sui 751 giorni del campione; sulle y c'è il valore della volatilità media della giornata, definita nel testo, all'inizio dello stesso intervallo. I punti sono 49, quanti sono gli intervalli di 10 minuti nella giornata di contrattazioni.

Capitolo 7

Analisi delle serie dei prezzi

7.1 Non solo bolle

Controllando la distribuzione dei drawdowns notiamo che sono 90 i drawdowns che si allontanano di almeno un 10% dal valore previsto dal fit, corrispondenti a cadute maggiori di 0.94%. Questi 90 drawdowns corrispondono a 52 giorni di contrattazioni sui 751 totali, in quanto in alcune giornate se ne verificano più di uno. È, dunque, in questi 52 giorni che abbiamo identificato la presenza di ‘minicrash’, rappresentati da drawdowns nei prezzi, caratterizzati dall’aver luogo in momenti di forti correlazioni temporanee. A cosa sono dovute queste correlazioni? Sono dovute allo scoppio di bolle fittate con una LPPL? Per rispondere a queste domande abbiamo utilizzato il seguente procedimento.

La ricerca delle strutture LPPL sulle serie precedenti a questi eventi è stata effettuata, per ognuno dei 52 minicrash, su due distinte serie dei prezzi, caratterizzate da una diversa definizione di ‘tempo’. La prima serie è quella normale, che presenta il prezzo in funzione del tempo fisico, misurato in ore e centesimi di ora (ad esempio 9.50 indica le ore 9:30); nella seconda serie il tempo è definito, con una trasformazione monotona non lineare del tempo fisico t , come il volume di tutti gli scambi cumulato fino all’istante t . Il motivo per cui abbiamo voluto analizzare anche le serie temporali costruite in questo modo è che ci sono motivi che spingono a credere (vedi [9]) che il tempo proprio del mercato, quello a cui le caratteristiche della dinamica emergerebbero in modo naturale, non sia il tempo fisico, ma una sua qualche trasformazione non lineare e un candidato è il volume cumulato.

A questo punto, per ognuno dei 52 eventi individuati, abbiamo analizzato entrambe le serie, quella nel tempo e quella nel volume, della giornata per vedere se il minicrash è preceduto da LPPL. Ciò è stato fatto in questo modo:

innanzi tutto abbiamo selezionato tra questi 52 eventi quelli che costituiscono la fine di un prolungato trend positivo. Se ne sono trovati 9. Il resto è costituito da crash che si inseriscono in un trend discendente, o sono improvvisi, o avvengono ad inizio mattinata; per definire cosa si intende esattamente per prolungato trend positivo diciamo che essenzialmente abbiamo sottoposto le serie precedenti ai 52 drawdowns a tre condizioni: abbiamo controllato che il minimo dei prezzi prima del drawdown avvenga almeno 90 minuti prima e che il volume cumulato in questo intervallo sia di almeno 3000 contratti (prolungato trend) e che questo trend sia consistente, nel senso che il prezzo aumenta di almeno 1.7% dal minimo al massimo prima del crash. Gli altri 43 non rispettano almeno una di queste due condizioni. Non abbiamo investigato oltre le ragioni di questi eventi.

Una prima nota che si può fare è che nel nostro campione di dati gli eventi legati a trend positivi nei prezzi sono pochi: solo 9 su 52. Nei dati analizzati da Sornette riguardo ai mercati alle basse frequenze, su 49 drawdowns outliers identificati in vari mercati, ben 25 erano preceduti da trend positivi nei prezzi e, di questi, tutti sono bolle speculative fittate con la LPPL con parametri molto vicini tra i vari casi, come abbiamo discusso nel paragrafo 2.2. Nel nostro studio solo 9 su 52 sono crash che costituiscono la fine di un forte trend positivo dei prezzi. Ora si tratta di capire se questi 9 eventi rientrano tutti in un'unica classe di fenomeni legati all'attraversamento di un punto critico, caratterizzata dalla presenza di LPPL con parametri universali, come succede a bassa frequenza, oppure se sono accidentali.

7.2 Metodo di fit

Per fare questo abbiamo lanciato un algoritmo di fit su ognuno dei 9 eventi, sia nelle serie in funzione del tempo, sia in quelle in funzione del volume cumulato. La funzione di fit è la (2.1), che qui riportiamo per chiarezza:

$$I(t) = A + B(t_c - t)^\beta + C(t_c - t)^\beta \cos(\omega \log(t_c - t) + \phi). \quad (7.1)$$

Diamo delle precisazioni riguardo alla metodologia di fit utilizzata. Prima di tutto, il fit è stato lanciato sulle serie dei prezzi e non dei loro logaritmi, come si fa in genere quando si considerano intervalli temporali grandi, dell'ordine di anni; infatti, il vantaggio di usare il logaritmo è che si riesce ad eliminare il drift presente nei prezzi, che si manifesta come una retta, per cui è facile identificare le deviazioni dall'equilibrio, che sono le deviazioni da questa retta, mentre nella scala dei prezzi si può confondere una bolla con tale drift. A livello intraday il drift del mercato è nullo, per cui è indifferente usare la scala normale o quella logaritmica.

Il punto finale della serie da fittare è l'istante in cui il prezzo raggiunge il valore massimo prima del crash; il punto iniziale è stato scelto caso per caso identificando il momento che per noi costituiva l'inizio della bolla; in tutti i casi tale identificazione è risultata evidente e corrispondente al minimo della serie prima del drawdown, non c'è stato, perciò, motivo di ripetere il fit sulla serie con un diverso punto iniziale. L'operazione di trovare il miglior fit per una distribuzione di dati è, essenzialmente, un problema di calcolare il minimo di una funzione, in questo caso la varianza $\text{var}(I) \propto \sum_{i=1}^N (p(t_i) - I(t_i))^2$, dove $p(t_i)$ sono i dati e $I(t)$ è la funzione di fit, soggetto eventualmente a dei constraints sui valori dei parametri. Nel nostro caso i constraints sono: $A > 0$, $B < 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$, $t_c > 0$. Come algoritmo di minimizzazione abbiamo utilizzato la routine FORTRAN chiamata NPSOL; questa prevede che si dia come input una stima preliminare dei parametri, poi procede a trovare un punto che soddisfa le condizioni di minimo muovendosi sulla superficie di cui si vuole ottenere il minimo con una serie di iterazioni in cui, approssimando ogni volta la superficie in quel punto con un paraboloide, si individua la direzione di minimo, trovando così un nuovo punto su cui si ripete la procedura. Per maggiori informazioni su NPSOL si veda [13].

Però, per dei dati pieni di rumore, come un indice azionario intraday e per una funzione di fit a 7 parametri, trovare il minimo di $\text{var}(I)$ non è semplice: nello spazio dei parametri questa funzione presenta molti minimi, per valori dei parametri anche molto diversi. A seconda della stima iniziale che si dà dei parametri, l'algoritmo di minimizzazione può intrappolarsi su uno piuttosto che su un altro minimo. Per essere sicuri di trovare il minimo della funzione abbiamo messo a punto una procedura, che cerca di scandagliare il più possibile lo spazio dei parametri. Questa, applicata ai dati a bassa frequenza ai 2 crash maggiori dell'indice Dow Jones del secolo scorso ha dato per i parametri gli stessi risultati ottenuti da Sornette, quindi, l'abbiamo considerata una procedura valida.

Questa procedura consiste in diversi passi. Per prima cosa abbiamo preparato una griglia di 5 valori per ognuno dei parametri β , ω e t_c , corrispondenti a $5^3 = 125$ punti nello spazio dei parametri. Per β i valori vanno da 0.4 a 1.6, distanziati di 0.3; per ω da 8 a 20, distanziati di 3; per t_c si parte dall'istante in cui l'indice prende il valore massimo e si aumenta di 1 ora nel caso del fit sulle serie in funzione del tempo, di 1000 contratti nel caso del fit sulle serie in funzione del volume cumulato. Per ognuno di questi 125 punti abbiamo utilizzato una procedura per trovare una stima di partenza per tutti e 7 i parametri; quindi, con queste 125 stime iniziali dei 7 parametri, abbiamo lanciato 125 volte l'algoritmo di minimizzazione NPSOL ottenendo 125 valori per i 7 parametri tra cui scegliere il migliore. Ora descriviamo la procedura per ottenere la stima preliminare dei parametri, in seguito vedremo

come scegliere il migliore tra i risultati finali.

La procedura per ottenere la stima preliminare è costruita in questo modo: in una prima fase abbiamo considerato la (7.1) come una funzione delle sole 4 variabili β , ω , ϕ e t_c . Ciò è stato fatto richiedendo che al minimo $\text{var}(I)$ abbia derivata nulla rispetto ai parametri lineari A , B e C . Se riscriviamo la (7.1) come $I(t) = A + Bf(t) + Cg(t)$, otteniamo tre equazioni lineari in A , B e C :

$$\sum_i^N \begin{pmatrix} p(t_i) \\ p(t_i)f(t_i) \\ p(t_i)g(t_i) \end{pmatrix} = \sum_i^N \begin{pmatrix} 1 & f(t_i) & g(t_i) \\ f(t_i) & f(t_i)^2 & f(t_i)g(t_i) \\ g(t_i) & f(t_i)g(t_i) & g(t_i)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Queste si risolvono facilmente e danno A , B e C in funzione di β , ω , ϕ e t_c . Tenendo conto di ciò, la procedura per ottenere la stima preliminare delle 7 variabili è costituita da 100 cicli in cui si parte da dei valori per β , ω , ϕ e t_c , si trovano A , B e C con la (7.2), si lancia l'algoritmo di minimizzazione con la (7.1) considerata come funzione delle 4 variabili non lineari, si ottengono dunque nuovi valori per queste 4 variabili con cui si ripete il ciclo. Questo per 100 volte; per cominciare questa serie di cicli i valori per le 4 variabili sono: per β , ω e t_c quelli del punto della griglia che stiamo considerando e per ϕ si prende il valore 1.

A questo punto abbiamo, per ognuno dei 125 punti della griglia, una stima preliminare per i 7 parametri; abbiamo, dunque, lanciato l'algoritmo NPSOL, ottenendo un elenco di 125 valori per i parametri, tutti in qualche modo minimi della funzione. Come si fa a scegliere il migliore? Abbiamo imposto delle condizioni che queste soluzioni devono rispettare per essere considerate dei buoni fit; tra tutte quelle che superano tale test, se ce ne sono, il miglior fit è scelto come quello per cui è minimo il r.m.s.¹

La prima condizione è essenzialmente una condizione di bontà del fit: il r.m.s. deve essere minore di 0.3. Poi abbiamo imposto delle condizioni sui parametri. Si tratta di condizioni molto poco restrittive, cioè non vogliamo selezionare a priori dei parametri; si tratta solo di condizioni intese ad eliminare situazioni estreme. Queste condizioni sono: $\beta > 0.2$, $4 < \omega < 40$ e $t_f < t_c < 2t_f$, dove t_f è il punto finale del fit. Qual è il significato di queste condizioni? Togliendo i β molto piccoli abbiamo voluto non considerare le situazioni di bolle molto lente, dalla scarsa potenza; gli ω molto piccoli li abbiamo eliminati perché vogliamo avere delle oscillazioni che siano chiaramente visibili, che non si confondano con un andamento costante; ω troppo

¹Il r.m.s. è definito così: $\text{r.m.s.} \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N \left(\frac{p(t_i) - I(t_i)}{p(t_i)} \right)^2}$, dove $p(t)$ è il prezzo, $I(t)$ è la funzione di fit e N è il numero di punti fittati.

grandi, d'altra parte, sono anche essi inutili da considerare perché impossibili da distinguere dal rumore; la condizione su t_c impone che questo avvenga dopo che l'indice ha raggiunto il massimo e che non sia troppo distante nel tempo; questo semplicemente perché perderebbe di senso l'idea di t_c come stima del momento del crash.

Abbiamo, inoltre, deciso di selezionare solo quelle situazioni per cui almeno 2 oscillazioni fossero chiaramente presenti nella bolla, proprio perché è questa la caratteristica della bolla che vogliamo evidenziare. Per fare ciò abbiamo operato la seguente trasformazione

$$p(t) \rightarrow p'(t) \equiv \frac{p(t) - [A + B(t_c - t)^\beta]}{C(t_c - t)^\beta} \quad (7.3)$$

che dovrebbe lasciare un puro $\cos[\omega \log(t_c - t) + \phi]$ se nessun altro effetto è presente; abbiamo, quindi, tenuto solo le situazioni per cui $p'(t)$, come funzione di $\log\left(\frac{t_c - t}{t_c}\right)$ compia almeno due periodi completi. Infine, come ulteriore test sulla significatività del fit, riguardo espressamente alle oscillazioni e alla loro frequenza, abbiamo controllato che effettivamente la $p'(t)$ avesse l'andamento di un coseno con la frequenza ω data dal fit; per fare ciò abbiamo analizzato la composizione in frequenza di $p'(t)$ sottoponendola ad un periodogramma di Lomb. Se la $p'(t)$ fosse esattamente un coseno, allora il periodogramma di Lomb darebbe un picco alla frequenza ω . La nostra condizione è che la frequenza di picco data dal periodogramma di Lomb non differisca dalla frequenza ω data dalla procedura di fit di più del 5%.

Se tra le 125 soluzioni ottenute scandagliando lo spazio dei parametri ci sono soluzioni che superano questi test, allora il miglior fit è considerato quello che, tra queste, ha il minor r.m.s.

7.3 Risultati

Con questa procedura, dei 9 casi individuati come crash preceduti da bolle, che abbiamo sottoposto alla procedura di fit, 7 hanno dato un risultato positivo, ovvero hanno superato i test e hanno prodotto un miglior fit, nelle serie costruite in funzione del volume cumulato e 6 nelle serie costruite in funzione del tempo. Come abbiamo visto, nella procedura di fit abbiamo lasciato ampia libertà ai parametri, in particolare abbiamo consentito che β fosse anche maggiore di uno, questo perché non volevamo condizionare con una selezione dei parametri la scelta del miglior fit. Però $\beta > 1$ è una situazione che dobbiamo escludere; infatti, rivedendo il modello sull'hazard rate, notiamo che c'è bisogno che β sia minore di uno perché l'hazard rate $h(t)$

data	β	ω	t_c	ϕ	A	B	C	r.m.s.
17/2/2000	0.71	11.3	16.7	2.37	48742	-472	-26.1	0.143
25/9/2001	0.4	10	12.8	2.79	27523	-1014	-133.3	0.186
1/11/2001	0.22	7.8	17.6	3.08	32020	-1139	-60.3	0.142
21/6/2002	0.3	19.3	12.0	1.25	28290	-1011	31.7	0.118
16/7/2002	0.47	4.5	15.8	5.04	25659	-514	-49.9	0.215

Tabella 7.1: Parametri e r.m.s. del miglior fit con la (7.1) della serie dei prezzi, in funzione del tempo, precedente il drawdown. t_c è espresso in ore e centesimi di ora.

data	β	ω	t_c	ϕ	A	B	C	r.m.s.
22/5/2000	0.37	27.1	17203	2.24	48348	-2042	24.3	0.128
21/9/2001	0.4	4.6	24575	1.21	25993	-981	-62.5	0.287
25/9/2001	0.57	10.5	11916	5.8	27277	-379	56.3	0.150
1/11/2001	0.34	28.8	15389	1.56	34085	-1597	-27.3	0.133
21/6/2002	0.63	20.1	7502	1.52	27739	-252	17.3	0.112
16/7/2002	0.71	6.	22658	3.71	25618	-186	-18.8	0.198

Tabella 7.2: Parametri e r.m.s. del miglior fit con la (7.1) della serie dei prezzi, in funzione del volume cumulato, precedente il drawdown. t_c è espresso in numero di contratti stipulati fino a quell'istante.

vada all'infinito all'avvicinarsi del punto critico, mentre $\beta > 1$ modella la situazione in cui $h(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_c$. Ci conforta il fatto che solo in un caso, sia nelle 7 serie in funzione del volume che nelle 6 serie in funzione del tempo, il β del miglior fit è risultato maggiore di uno.

Il risultato dell'analisi è, dunque, che dei 9 drawdowns preceduti da una bolla dei prezzi 6 presentano una struttura LPPL nella serie in funzione del volume cumulato e 5 lo fanno nella serie in funzione del tempo. I parametri del miglior fit in questi casi sono mostrati nelle tabelle 7.1 e 7.2 e il grafico dei prezzi nella giornata, con la funzione di fit, sono presentati nelle figure da 7.3 a 7.13 a fine paragrafo. Questo è un primo risultato importante: la struttura LPPL all'approssimarsi di un grande drawdown è riscontrabile anche a livello intraday, anche se non in maniera così evidente come alle basse frequenze; infatti, negli studi di Sornette tutti i drawdowns identificati come la fine di una bolla dei prezzi sono stati fittati con successo da una struttura LPPL, per di più con parametri β e ω molto simili nei diversi casi. Vediamo ora le caratteristiche di questi fit.

I parametri più importanti sono β e ω , che dovrebbero dare l'idea di universalità: nelle 6 serie fittate nel volume cumulato β assume valori che

vanno da 0.34 a 0.71, da cui si ottiene in media $\beta = 0.5 \pm 0.16$; ω è anche più dispersivo, con valori che vanno da 4.6 a 28.8, per cui in media $\omega = 16 \pm 10$. Nelle 5 serie fittate nel tempo β prende valori da 0.22 a 0.71, in media $\beta = 0.42 \pm 0.18$; ω va da 4.5 a 19.3 e in media è $\omega = 10.6 \pm 5.5$. Come si vede, anche graficamente dalla figura 7.1, la dispersione di questi parametri non è fortissima; si fa sentire in particolar modo nel parametro ω e, soprattutto, nelle serie fittate nel volume cumulato. Essi non trasmettono decisamente quel senso di universalità che si trova nelle stesse strutture a bassa frequenza nei mercati evoluti, ma la dispersione di questi parametri è paragonabile a quella che Sornette ha trovato per i mercati minori, forse un po' peggio è la situazione di ω . Questo è un risultato notevole: abbiamo trovato la presenza di LPPL nelle serie precedenti ai crash, con parametri 'accettabili', anche se non in tutti i casi in cui le avremmo potute trovare.

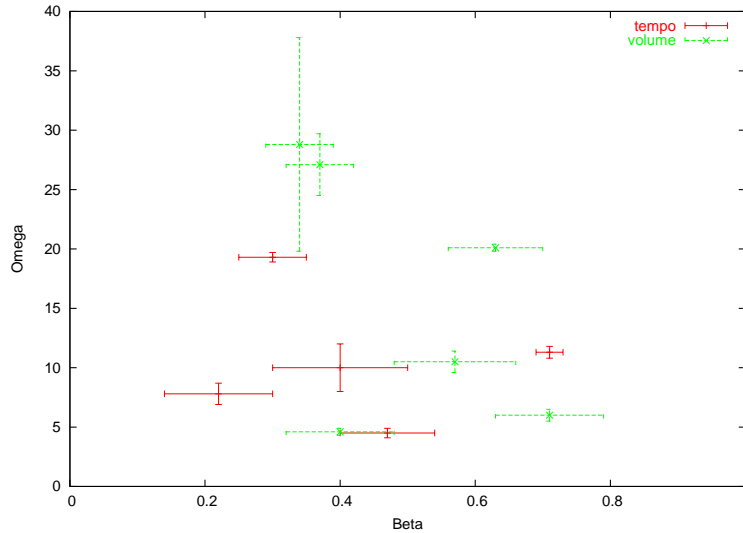


Figura 7.1: Valori di β e di ω per i 5 casi individuati nelle serie in funzione del tempo e i 6 casi nelle serie in funzione del volume cumulato.

Però, l'analisi di altre caratteristiche dei fit, suggerisce che questi non appartengano ad un'unica classe di fenomeni. Inoltre, un'analisi della robustezza, vedremo definita come, dei parametri fa credere che questi non siano una caratteristica molto forte delle serie fittate. Vediamo il parametro 'oscillation strength', ovvero il rapporto C/B , che misura quanto sono forti le oscillazioni rispetto al trend dominante: nei risultati a bassa frequenza esso oscilla tra il 5% e il 10%, mentre nel nostro caso va da un valore molto basso di 1.2% al 14.85% nelle serie fittate nel volume cumulato; nelle serie fittate in funzione del tempo sembra un po' meno dispersivo e con valori minimi più alti: si va dal 3.1% al 13.1%. Molto diverso nei vari casi è anche il rapporto

data	inizio	fine	salita	drop rel.	drop ass.	t-v
17/2/2000	10.37	16.03	2.94%	76%	2.17%	t
22/5/2000	10.63	14.47	3.28%	92%	2.92%	v
21/9/2001	14.63	16.75	6.95%	70%	4.55%	v
25/9/2001	9.98	11.83	3.71%	33%	1.2%	t-v
1/11/2001	11.05	15.72	1.90%	113%	2.1%	t-v
21/6/2002	9.82	11.88	2.91%	46%	1.3%	t-v
16/7/2002	12.32	15.67	3.80%	65%	2.38%	t-v

Tabella 7.3: Caratteristiche dei fit. La seconda e la terza colonna indicano l'istante di inizio e di fine della bolla, misurati in ore e centesimi di ora; salita è l'aumento percentuale dei prezzi tra l'inizio e la fine della bolla; drop rel. e drop ass. sono stati definiti nel testo; l'ultima colonna indica se la bolla è stata fittata nel tempo (t) e/o nel volume (v).

data	β	ω	Δt_c	Δt_c rel.	osc. str.	r.m.s. $p'(t)$
17/2/2000	0.71 ± 0.02	11.3 ± 0.5	0.67	11.8%	5.5%	1.93
25/9/2001	0.4 ± 0.1	10 ± 2	0.97	52%	13.1%	0.28
1/11/2001	0.22 ± 0.08	7.8 ± 0.9	1.88	40.1%	5.3%	0.53
21/6/2002	0.3 ± 0.05	19.3 ± 0.4	0.12	5.7%	3.1%	1.01
16/7/2002	0.47 ± 0.07	4.5 ± 0.4	0.13	3.86%	9.7%	0.97

Tabella 7.4: Caratteristiche dei 5 fit ottenuti nelle serie costruite in funzione del tempo. Il significato di Δt_c , Δt_c rel. e osc. str. è spiegato nel testo. L'ultima colonna riporta il valore del r.m.s. della serie detrendizzata definita dalla trasformazione (7.3) fittata con $\cos[\omega \log(t_c - t) + \phi]$ con i parametri ω , ϕ e t_c dati dalla (7.1).

tra la dimensione della caduta successiva allo scoppio della bolla, calcolata come la differenza tra il valore massimo dell'indice prima dell'inversione del trend, ovvero il punto finale del fit, meno il valore del minimo successivo e la dimensione della bolla. Tale parametro, che abbiamo chiamato 'drop relativo', mostrato nella tabella 7.3, oscilla tra un minimo del 33% ed un massimo del 113%: cioè, i crolli seguenti ad una crescita dei prezzi con struttura LPPL possono anche essere di dimensioni maggiori della bolla stessa. Questo, in qualche modo, sminuisce la forza di questa bolla. Il parametro 'drop assoluto', invece, misura la dimensione del crollo percentuale rispetto al valore massimo dell'indice e non rispetto alla dimensione della bolla.

In figura 7.2 è mostrata la dispersione della durata delle bolle all'interno della giornata. Per le serie fittate in funzione del tempo la durata è espressa in forma percentuale come il rapporto tra i minuti di durata della bolla e il

data	β	ω	Δt_c	Δt_c rel.	osc. str.	r.m.s. $p'(t)$
22/5/2000	0.37 ± 0.05	27.1 ± 2.6	5780	85.8%	1.2%	1.02
21/9/2001	0.4 ± 0.08	4.6 ± 0.3	220	2.7%	6.37%	0.62
25/9/2001	0.57 ± 0.09	10.5 ± 0.9	3029	49.6%	14.85%	0.26
1/11/2001	0.34 ± 0.05	28.8 ± 9	8756	225%	1.71%	0.65
21/6/2002	0.63 ± 0.07	20.1 ± 0.3	41	0.8%	6.86%	1.40
16/7/2002	0.71 ± 0.08	6 ± 0.5	886	10.3%	10.1%	0.99

Tabella 7.5: Come la tabella 7.4, ma per i 6 fit delle serie costruite in funzione del volume cumulato.

numero di minuti di una intera giornata di contrattazioni, ovvero 495; per le serie fittate in funzione del volume cumulato, invece, la durata percentuale rispetto alla durata di giornata è espressa come il rapporto tra il volume di scambi cumulato durante la bolla e il volume di scambi totali della giornata. Come si vede dalla figura 7.2 le bolle fittate nel tempo non hanno una durata specifica, vanno da un 20% ad un 60% della durata della giornata, mentre sembrano avere una durata ben caratteristica le bolle fittate nel volume cumulato, per cui il volume scambiato durante la bolla è il $(28 \pm 3)\%$ dell'intero volume di giornata.

Vediamo se il parametro t_c rappresenta una buona stima per l'istante del crash. Nelle tabelle 7.4 e 7.5 sono elencati i parametri Δt_c e Δt_c relativo. Δt_c è, espresso in ore nel caso delle bolle fittate nel tempo e in numero di contratti per le bolle fittate nel volume cumulato, la distanza tra t_c e t_{max} , ovvero il punto finale della bolla, dove l'indice raggiunge il massimo. Δt_c relativo è questa distanza espressa come percentuale della durata della bolla, rispettivamente misurata in ore per le bolle fittate nel tempo e in numero di contratti per quelle fittate nel volume cumulato. Anche per questi parametri si nota una forte dispersione, soprattutto nei casi delle bolle fittate nel volume, dove Δt_c relativo va da 0.8% a 225%, cioè t_c può anche trovarsi ad una distanza da t_{max} di oltre il doppio della durata della bolla; mentre nelle bolle fittate nel tempo t_c non è mai distante più di un periodo uguale al 50% della durata della rispettiva bolla e solo in un caso t_c avviene a più di 1 ora dalla fine del fit.

Infine, una cosa interessante da notare è la posizione delle bolle all'interno della giornata: 2 bolle avvengono di mattina e finiscono prima di mezzogiorno, un'altra termina alle 14:30, altre 2 poco dopo le 15:30, una comincia subito dopo le 14:30 e solo una attraversa un'intervallo che va dalla mattina sino a oltre le 15:30 terminando alle 4 del pomeriggio. Questo sembra indicare che la dinamica del mercato italiano, a livello intraday, è dipendente da quella di Wall Street, la quale, come abbiamo già detto, apre alle 15:30 e

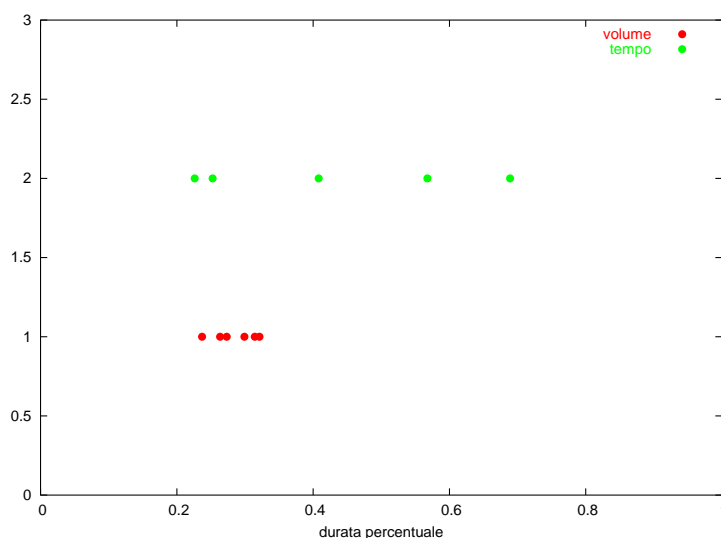


Figura 7.2: In verde: durata percentuale delle 5 bolle individuate nelle serie in funzione del tempo, misurata come rapporto tra i minuti di durata della bolla e i 495 minuti della giornata; in rosso: durata percentuale delle 6 bolle nelle serie in funzione del volume cumulato, misurata come rapporto tra il volume cumulato durante la bolla e il volume totale degli scambi di giornata. 0.1 indica il 10%.

dà i primi forti segnali di giornata anche alle 14:30, quando possono essere divulgati importanti dati macroeconomici. Per le nostre bolle questi orari sembrano essere significativi: le bolle o terminano prima delle 15:30, quindi non sono influenzate dalla dinamica di Wall Street o cominciano dopo le 14:30, quindi a Wall Street già in moto e solo una attraversa questi due ‘regimi’ della dinamica.

Dopo aver visto le caratteristiche generali delle bolle fittate abbiamo voluto testare la robustezza dei parametri prodotti dal fit, in particolare di β , ω e t_c , per vedere se sono delle caratteristiche intrinseche delle serie fittate o sono solo accidentali. Per fare ciò abbiamo operato in questo modo: abbiamo tolto via via dei punti dalle serie fittate a partire dall’ultimo, dove l’indice raggiunge il massimo, e ogni volta abbiamo rifittato questa serie troncata, ottenendo nuovi valori per i parametri. Abbiamo, quindi, visto quanti punti è stato necessario togliere perché i valori dei parametri differissero del 10% o del 20% da quelli originari. I risultati sono mostrati nelle tabelle 7.6 e 7.7 rispettivamente per i fit nel tempo e quelli nel volume. Il numero indica, in percentuale rispetto alla durata della bolla, sempre misurata in minuti nel primo caso e in numero di contratti nel secondo caso, quanti punti è bastato togliere per avere parametri diversi del 10% o del 20% da quelli originari. I

risultati sono abbastanza deludenti. Come si vede ci sono anche degli zeri; questi si spiegano col fatto che la procedura di fit per questa analisi è diversa da quella utilizzata in precedenza: abbiamo semplicemente preso come input iniziale per i parametri i valori dei fit originari e, con questi, abbiamo lanciato l'algoritmo di minimizzazione NPSOL a 7 parametri. Zero significa che, utilizzando questa procedura diversa e pur partendo da una stima iniziale per i parametri uguale al risultato dato dalla procedura di fit originaria, l'algoritmo di minimizzazione va a cadere su un nuovo minimo, facendo quindi perdere di qualsiasi significatività i valori originari dei parametri. Da queste due tabelle si nota come il parametro che è più sensibile ad un troncamento del fit nella parte finale è β , che già dopo pochi minuti cambia di molto; ω è in genere più robusto e soprattutto t_c ha dei valori decisamente più ragionevoli. Se c'è un'informazione positiva che si può ricavare da questi dati è che quelli per i fit in funzione del tempo sono migliori rispetto a quelli delle serie fittate nel volume. Infatti, nelle 4 bolle che sono state fittate sia nel tempo che nel volume (25/9/2001, 1/11/2001, 21/6/2002 e 16/7/2002) i parametri di robustezza per le bolle fittate nel tempo sono sempre maggiori o, al massimo uguali, di quelli delle bolle fittate nel volume.

data	durata	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\omega_{10\%}$	$\omega_{20\%}$	$t_{c10\%}$	$t_{c20\%}$
17/2/2000	341	2%	3.5%	4.4%	10.8%	25%	25.8%
25/9/2001	112	3.5%	4.5%	3.5%	3.5%	10.5%	> 33%
1/11/2001	281	0	0	9.2%	9.2%	10.3%	11.4%
21/6/2001	125	8.8%	8.8%	26.4%	26.4%	26.4%	31.2%
16/7/2001	202	0.5%	0.5%	1%	2%	7%	8%

Tabella 7.6: Robustezza dei parametri β , ω e t_c nelle 5 serie fittate nel tempo. La modalità con cui sono ottenuti i valori percentuali è riportata nel testo.

data	durata	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\omega_{10\%}$	$\omega_{20\%}$	$t_{c10\%}$	$t_{c20\%}$
22/5/2000	231	7%	21%	16.9%	21.2%	19.9%	27.3%
21/9/2001	128	0.8%	1.6%	8.6%	8.6%	17.2%	25%
25/9/2001	112	1.8%	3.5%	0.9%	2.7%	2.7%	15.2%
1/11/2001	281	0	0	0	0	0	7.8%
21/6/2002	125	6.4%	8%	17.6%	26.4%	26.4%	26.4%
16/7/2002	202	0.5%	0.5%	0.5%	2%	4.5%	6.5%

Tabella 7.7: Come la tabella 7.6, ma per i 6 fit delle serie costruite in funzione del volume cumulato.

Infine, abbiamo controllato se le strutture LPPL fossero presenti anche in altri periodi, tra quelli non individuati con la presenza di un drawdown

data	β	ω	t_c	ϕ	A	B	C	r.m.s.	t-v
2/1/2001	0.56	14.9	14.6	4.63	44853	-570	33.6	0.085	t
13/8/2002	0.52	9.4	17.0	4.40	25850	-565	-55.6	0.142	t
12/5/2000	0.73	16.3	15420	3.06	47094	-186	-13.0	0.084	v
2/1/2001	0.67	9.6	4863	4.02	44317	-378	39.2	0.078	v
12/2/2001	0.62	8.8	13167	0.35	43623	-193	29.8	0.074	v
23/7/2001	0.8	5.2	7296	1.08	36509	-152	17.9	0.066	v
9/8/2002	0.42	8.9	14567	2.98	26262	-568	47.0	0.145	v

Tabella 7.8: Parametri e r.m.s. del miglior fit con la (7.1) delle serie dei prezzi fittate nei periodi in cui non sono presenti drawdowns di grosse dimensioni. Il procedimento per ottenere tali fit è spiegato nel testo. Le prime due righe sono fit ottenuti nelle serie in funzione del tempo (nell'ultima colonna è segnata una t) e t_c è misurato in ore e centesimi di ora; le altre 5 sono fit ottenuti nelle serie in funzione del volume cumulato (nell'ultima colonna è segnata una v) e t_c è misurato in numero di contratti dall'inizio della giornata.

di grosse dimensioni, per testare la significatività dell'associazione strutture LPPL-grandi drawdowns. Abbiamo operato in questo modo: abbiamo preso i 751 giorni del nostro campione e abbiamo selezionato quelli per cui il minimo di giornata precede il massimo di giornata, in modo da garantirci un trend positivo dei prezzi: questi sono 363 eventi. Prima di lanciare il fit abbiamo ulteriormente selezionato questi eventi chiedendo che questo trend rispettasse 3 condizioni, come nei fit eseguiti in precedenza in occasione dei grandi drawdowns, ovvero che il trend durasse almeno 90 minuti, che l'apprezzamento dei prezzi fosse almeno dell'1.7% e che durante la bolla venissero scambiati almeno 3000 contratti; tutto questo per selezionare trend positivi di una certa consistenza. Questo ci ha ridotti a 158 eventi; su tali eventi abbiamo lanciato la stessa procedura di fit delle bolle individuate con il metodo dei drawdowns sulla serie tra il minimo e il massimo di giornata, ancora una volta sia nelle serie in funzione del tempo sia nelle serie in funzione del volume cumulato. Solo, abbiamo richiesto dei valori un po' più stringenti per i parametri: $0.2 < \beta < 0.8$, $5 < \omega < 20$, $5\% < C/B < 15\%$ e $\text{r.m.s.} < 0.2$. Il risultato ha dato 5 eventi fittati molto bene nelle serie in funzione del volume cumulato e 2 soli eventi nelle serie in funzione del tempo. I grafici e i valori dei parametri di questi fit sono nelle figure a fine paragrafo da 7.14 a 7.19 e nella tabella 7.8.

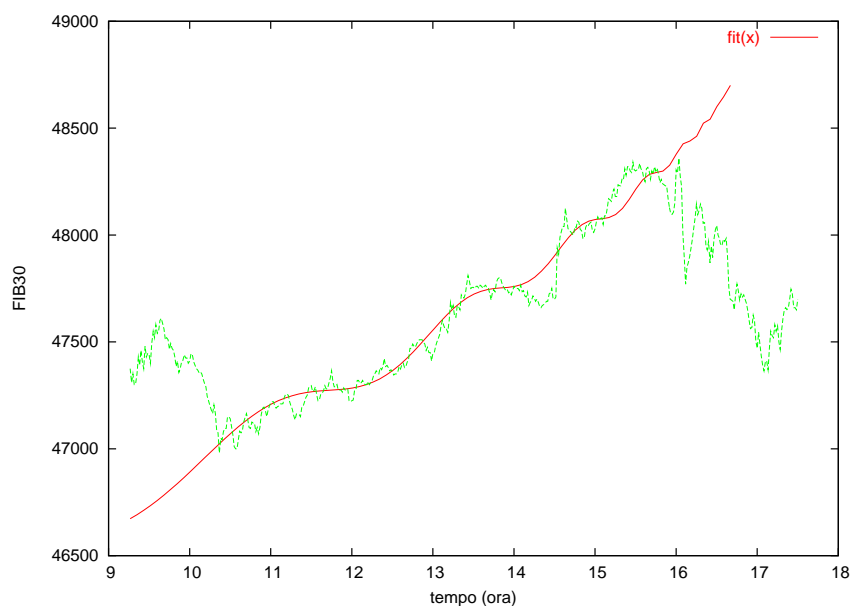


Figura 7.3: Serie dei prezzi in funzione del tempo del 17/2/2000 con il miglior fit con la (7.1). Il punto iniziale del fit è $t_{min} = 10.37$, il punto finale $t_{max} = 16.03$. Il drawdown dell'1.22% avviene al tempo $t_d = 16.03$. Il tempo è misurato in ore. I parametri del fit sono nella tabella 7.1.

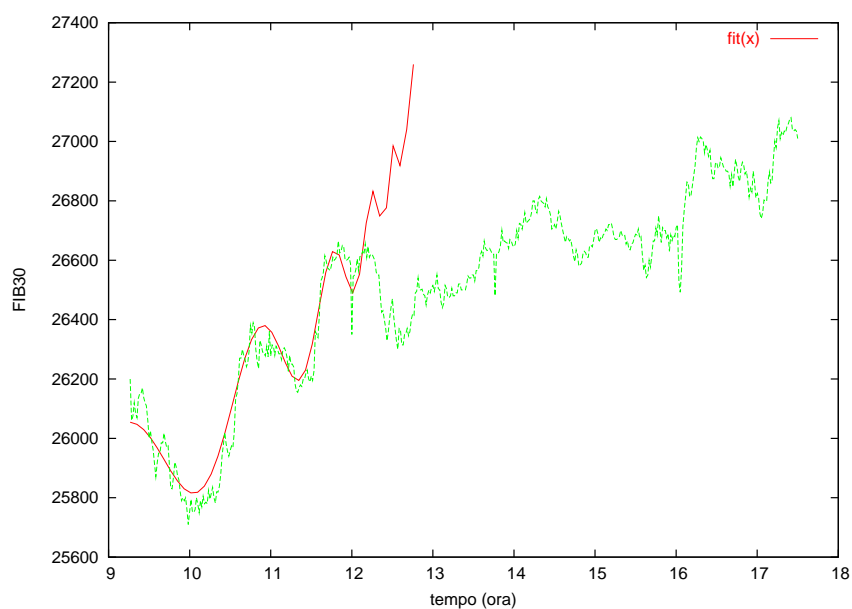


Figura 7.4: Lo stesso della fig.7.3 per il 25/9/2001. $t_{min} = 9.98$; $t_{max} = 11.83$; $t_d = 11.97$; il drawdown vale 0.98%.

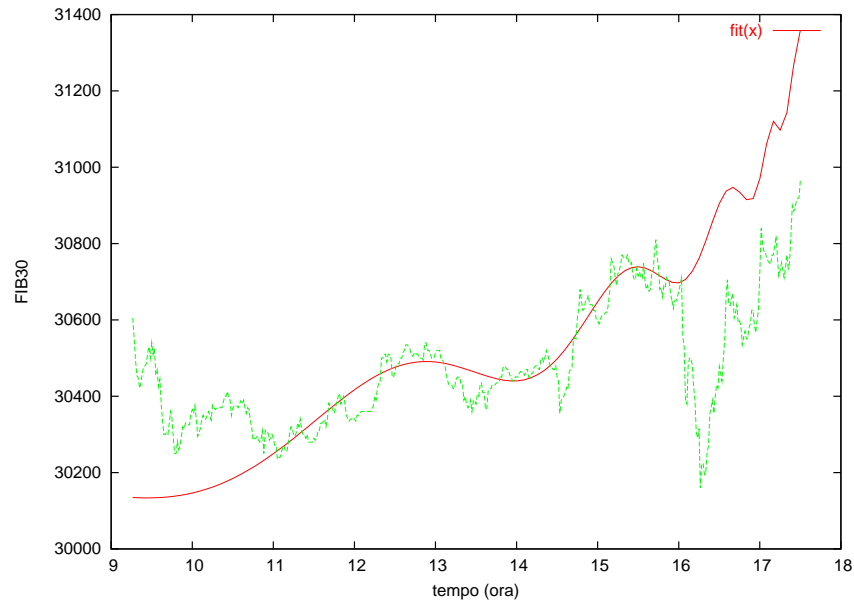


Figura 7.5: Lo stesso della fig.7.3 per il 01/11/2001. $t_{min} = 11.05$; $t_{max} = 15.72$; $t_d = 16.03$; il drawdown vale 1.07%.

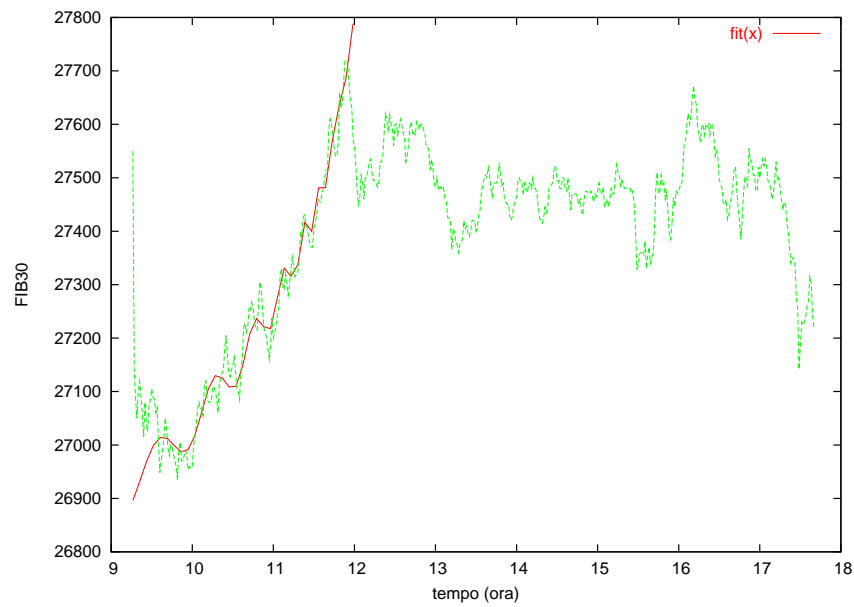


Figura 7.6: Lo stesso della fig.7.3 per il 21/6/2002. $t_{min} = 9.82$; $t_{max} = 11.88$; $t_d = 11.90$; il drawdown vale 0.97%.

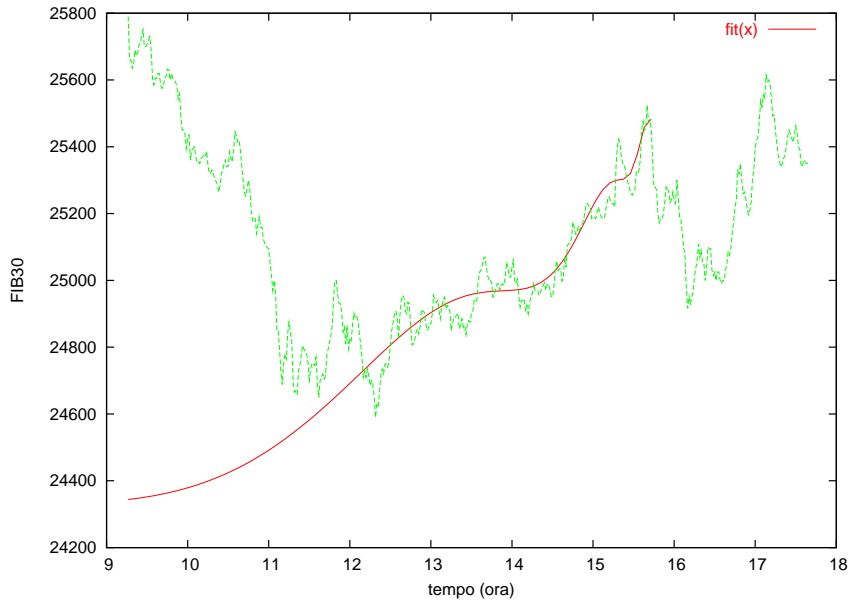


Figura 7.7: Lo stesso della fig.7.3 per il 16/7/2002. $t_{min} = 12.32$; $t_{max} = 15.67$; $t_d = 16.03$; il drawdown vale 1.52%.

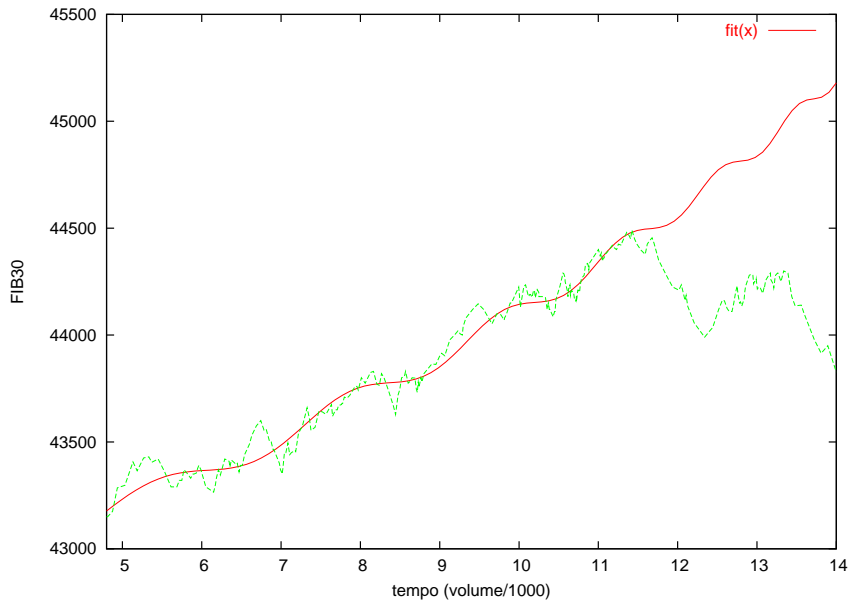


Figura 7.8: Serie dei prezzi in funzione del volume cumulato del 22/5/2000 con il miglior fit con la (7.1). Il punto iniziale del fit è $t_{min} = 4.688$, il punto finale $t_{max} = 11.423$. Il drawdown dell'1.19% avviene al tempo $t_d = 12.162$. Il tempo è misurato in migliaia di contratti. I parametri del fit sono nella tabella 7.1.

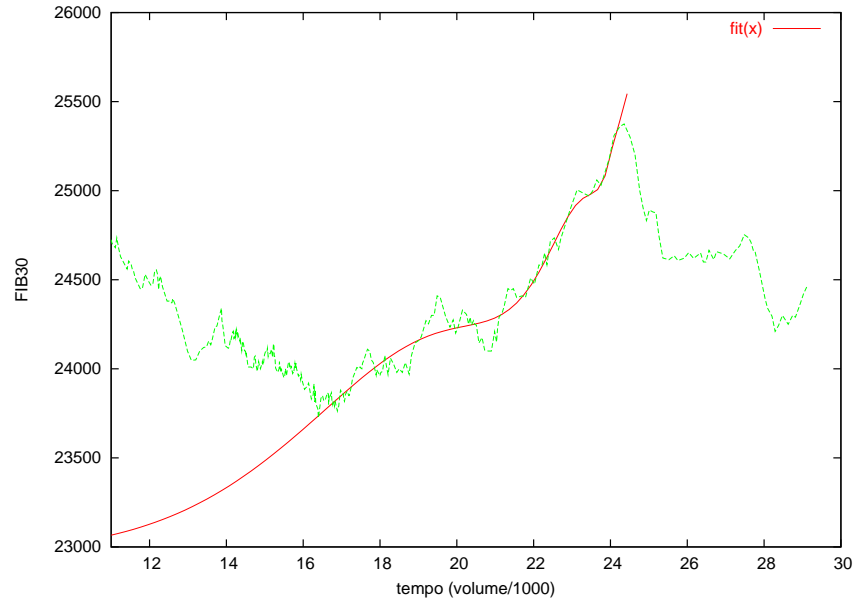


Figura 7.9: Lo stesso della fig.7.8 per il 21/9/2001. $t_{min} = 16.398$; $t_{max} = 24.355$; $t_d = 24.938$; il drawdown vale 2.14%.

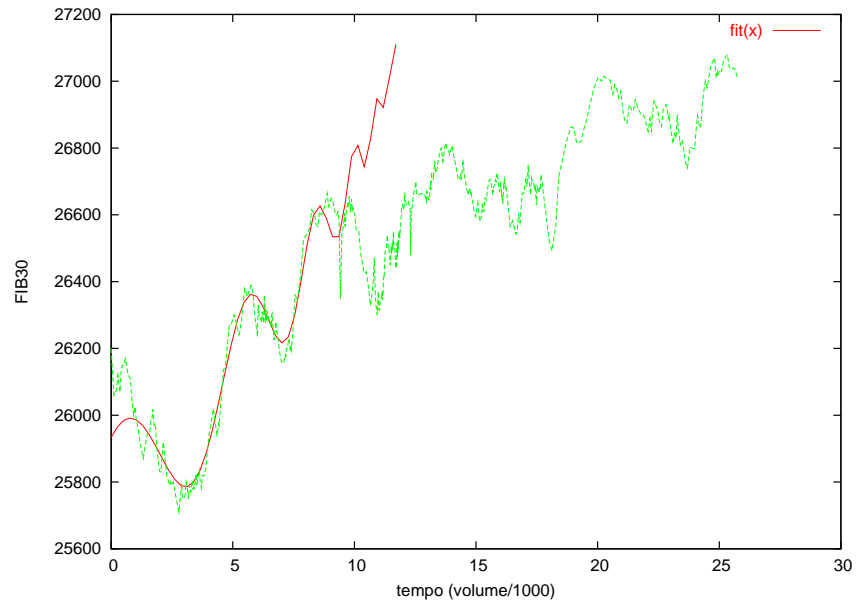


Figura 7.10: Lo stesso della fig.7.8 per il 25/9/2001. $t_{min} = 2.785$; $t_{max} = 8.887$; $t_d = 9.426$; il drawdown vale 0.98%.

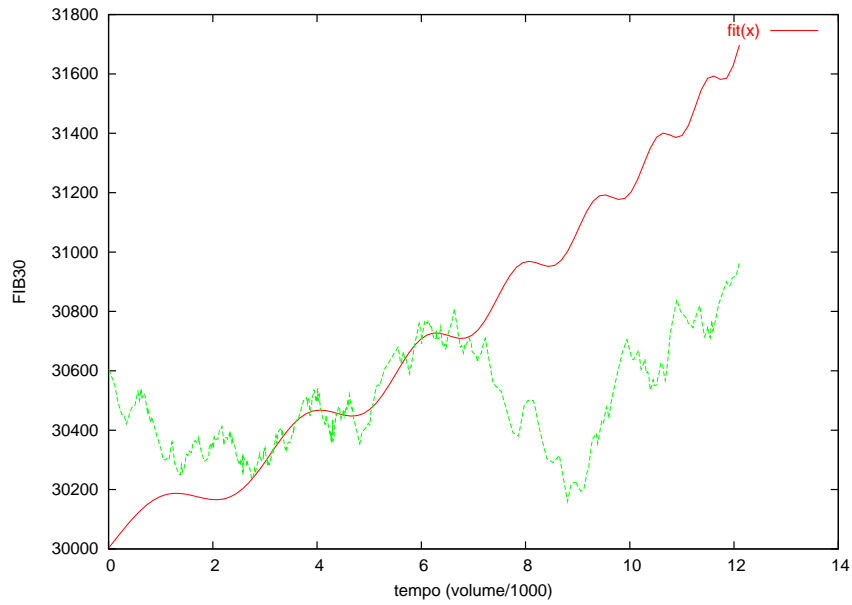


Figura 7.11: Lo stesso della fig.7.8 per il 1/11/2001. $t_{min} = 2.746$; $t_{max} = 6.633$; $t_d = 7.866$; il drawdown vale 1.07%.

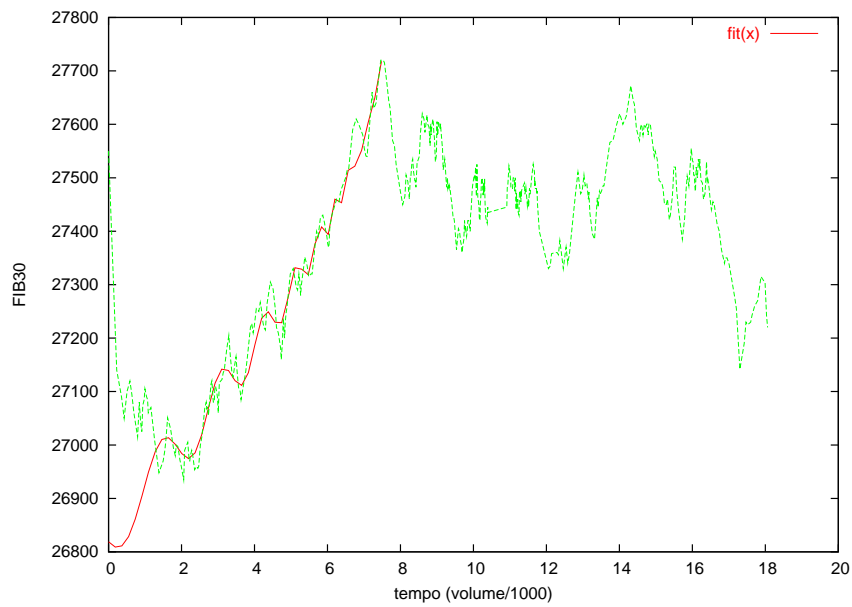


Figura 7.12: Lo stesso della fig.7.8 per il 21/6/2002. $t_{min} = 2.058$; $t_{max} = 7.461$; $t_d = 8.061$; il drawdown vale 0.97%.

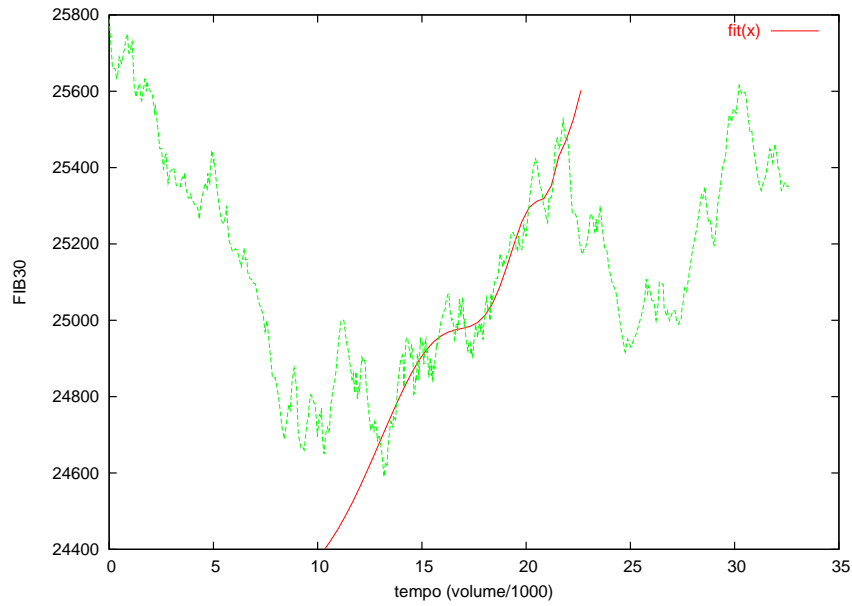


Figura 7.13: Lo stesso della fig.7.8 per il 16/7/2002. $t_{min} = 13.183$; $t_{max} = 21.772$; $t_d = 24.750$; il drawdown vale 1.52%.

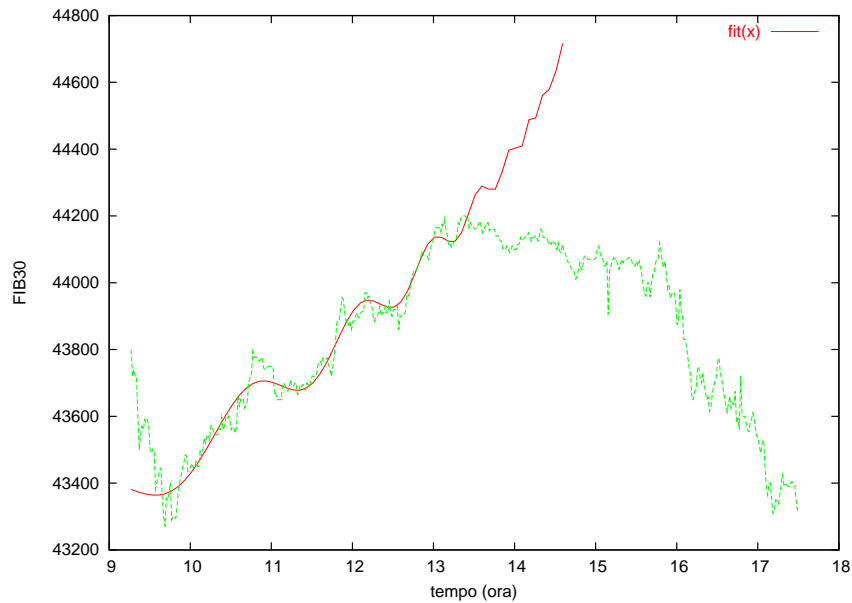


Figura 7.14: Serie dei prezzi in funzione del tempo del 2/1/2001 con il miglior fit con la (7.1). Il punto iniziale del fit è $t_{min} = 9.69$, il punto finale $t_{max} = 13.35$. Il tempo è misurato in ore. I parametri del fit sono nella tabella 7.8.

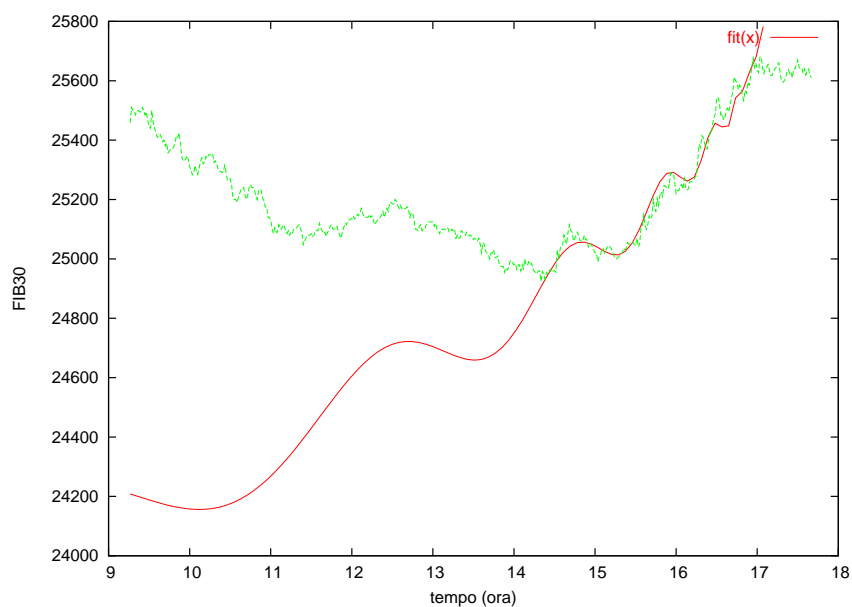


Figura 7.15: Lo stesso della fig.7.14 per il 13/8/2002. $t_{min} = 14.33$; $t_{max} = 17.03$.

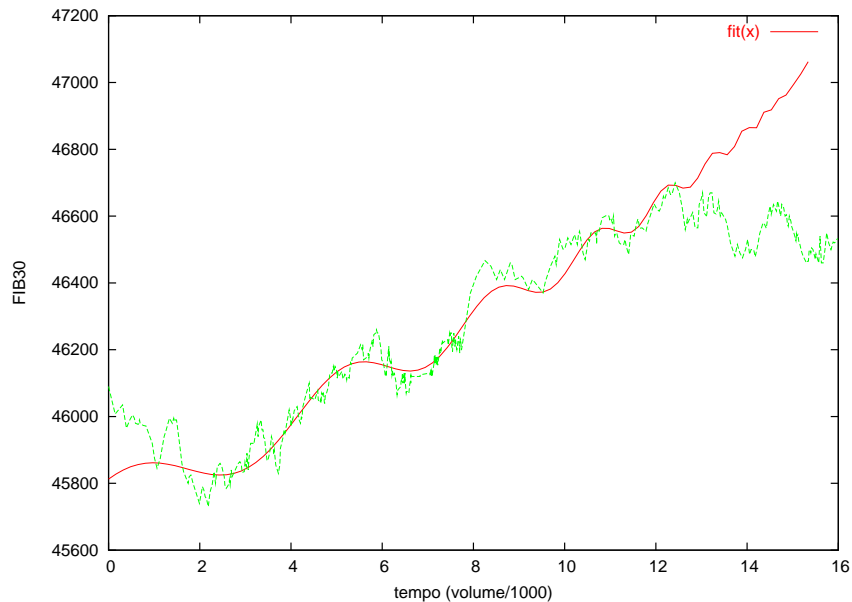


Figura 7.16: Serie dei prezzi in funzione del volume cumulato del 12/5/2000 con il miglior fit con la (7.1). Il punto iniziale del fit è $t_{min} = 2.187$, il punto finale $t_{max} = 12.424$. Il tempo è misurato in migliaia di contratti. I parametri del fit sono nella tabella 7.8.

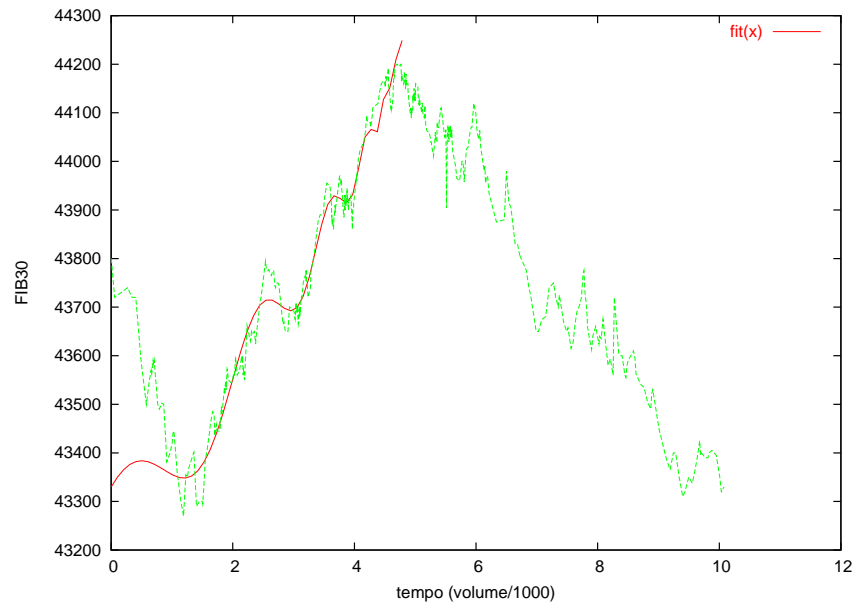


Figura 7.17: Lo stesso della fig.7.16 per il 2/1/2001. $t_{min} = 1.191$; $t_{max} = 4.694$.

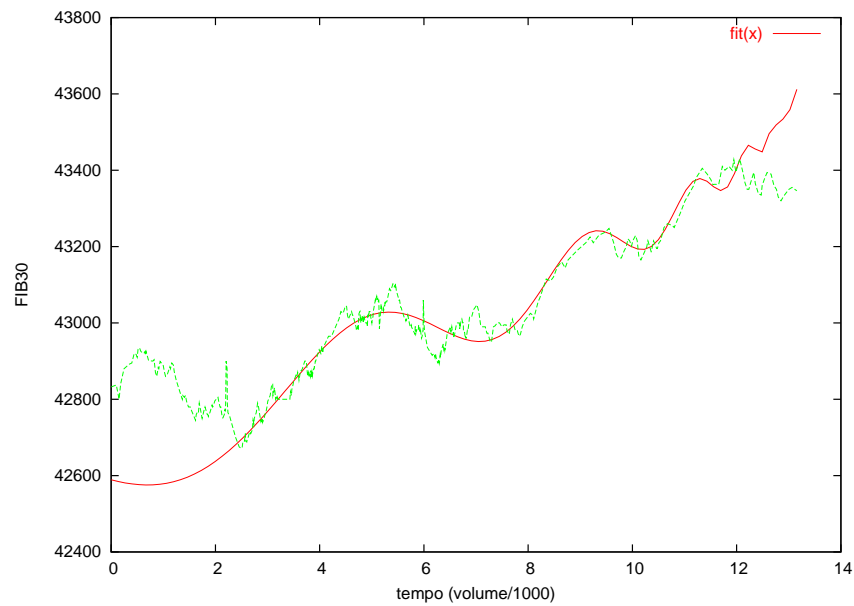


Figura 7.18: Lo stesso della fig.7.16 per il 12/2/2001. $t_{min} = 2.492$; $t_{max} = 12.059$.

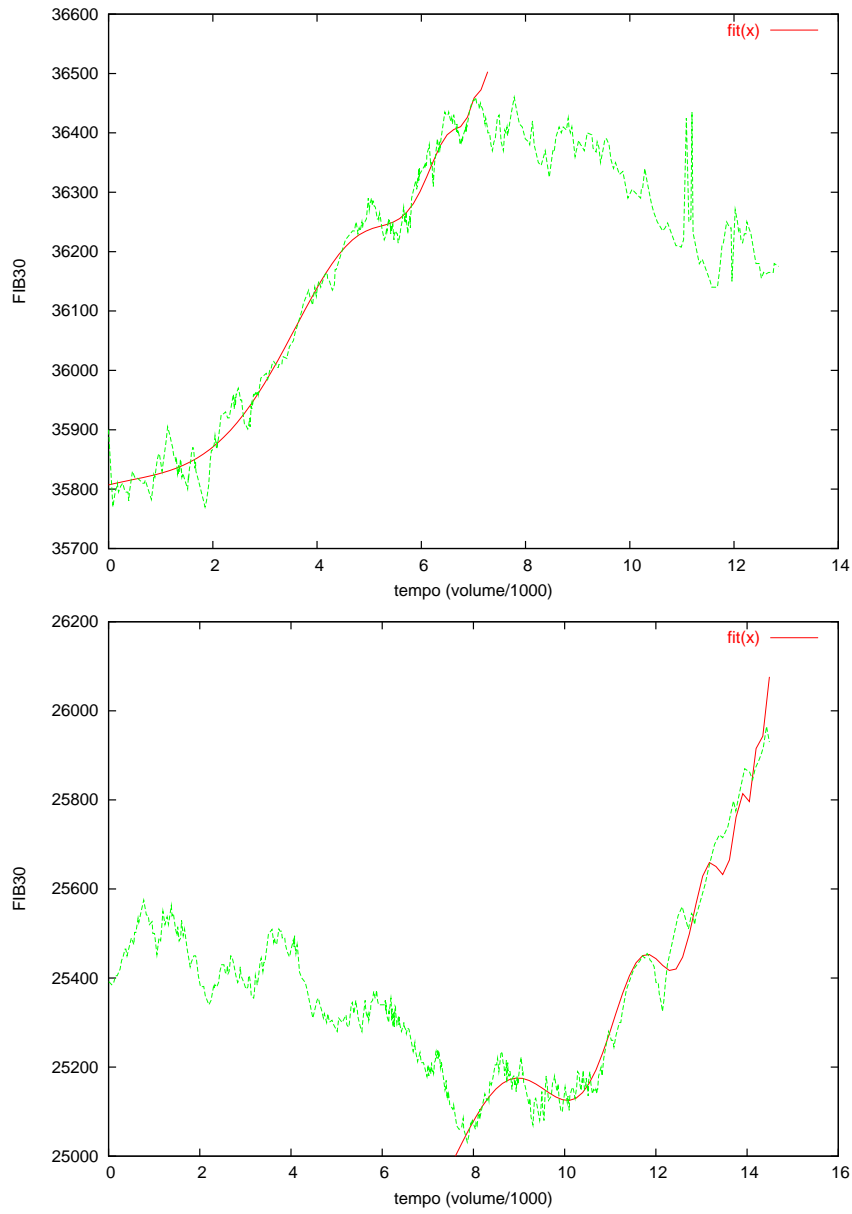


Figura 7.19: Alto: lo stesso della fig.7.16 per il 23/7/2001. $t_{min} = 0.084$; $t_{max} = 7.044$. Basso: lo stesso della fig.7.16 per il 9/8/2002. $t_{min} = 7.865$; $t_{max} = 14.427$.

Capitolo 8

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo studiato la presenza e le caratteristiche di strutture LPPL nelle serie dei prezzi precedenti drawdowns di grosse dimensioni alle frequenze intraday. Il campione analizzato è l'indice FIB30 nel periodo che va dall'11/1/2000 al 31/12/2002. Abbiamo introdotto il concetto di drawdown e abbiamo costruito la distribuzione cumulativa di questi per il campione analizzato. Abbiamo trovato che i drawdowns più grandi, dall'1% in su, differiscono in modo significativo, dell'ordine del 10%, dal fit del resto della distribuzione con un esponenziale allungato, per cui essi sono dovuti a forti correlazioni temporanee. Solo 9 di questi 90 drawdowns 'outliers' sono preceduti da serie dei prezzi, che presentano un trend positivo.

La ricerca delle strutture LPPL, su questi eventi, è stata portata avanti sia nelle serie in funzione del tempo fisico, misurato in ore, sia nelle serie dei prezzi costruite come funzione del volume cumulato. Di queste 9 bolle, 6 sono fittate con una LPPL (eq. (7.1)) nelle serie in funzione del volume cumulato e 5 nelle serie in funzione del tempo. Quindi, le strutture LPPL nelle serie precedenti i grandi drawdowns si ritrovano anche nelle frequenze intraday. I parametri β e ω non hanno una spiccata universalità come nei mercati evoluti a basse frequenze, ma comunque la dispersione è incoraggiante riguardo alla bontà della teoria, che vede una origine dei drawdowns nell'attraversamento di un punto critico da parte di un sistema che gode di simmetria di scala discreta. Però il resto delle caratteristiche delle bolle sono molto meno universali rispetto a quanto si trova in letteratura sulle stesse strutture a bassa frequenza. Soprattutto, i parametri trovati con il miglior fit non sono molto robusti rispetto ad un troncamento della serie e si trovano serie fittate con la (7.1) con parametri simili a quelli individuati per mezzo dei drawdowns, anche in periodi dove non è presente alcun crollo dell'indice.

Sembra, dunque, che i drawdowns preceduti da bolle non costituiscano, alle frequenze intraday, un'unica classe di fenomeni, come avviene alle basse

frequenze. Che conclusioni possiamo trarre da ciò? Possiamo fare due ipotesi:

- La teoria di Sornette vale anche a livello intraday, per cui anche a queste frequenze l'imitazione riesce a propagarsi nel sistema per diventare cooperazione globale; ma l'universalità delle strutture LPPL è limitata e nascosta da effetti di bordo, legati alla limitatezza delle dimensioni del mercato italiano e dal rumore, fortemente presente a queste frequenze;
- La teoria non si applica a queste frequenze, probabilmente perché nella teoria dell'hazard rate un punto fondamentale vuole che il parametro K , che misura il grado di imitazione tra i primi vicini, si muova con lentezza per permettere alle strutture di formarsi nelle vicinanze del punto critico, ma questo forse nell'intraday non succede, perché il mercato è più nervoso, suscettibile; oppure a queste frequenze il sistema non riesce a comportarsi in modo cooperativo, in quanto i tempi scala sono molto ridotti e la cooperatività non ha il tempo di formarsi.

I dati ottenuti in questo lavoro sembrano far propendere per la prima ipotesi, visto che effettivamente evidenze di LPPL precedenti ai grossi drawdowns si sono trovate, e con dei valori per β e ω non molto dispersivi. Tra le serie fittate nel tempo e quelle fittate nel volume i risultati sembrano essere più incoraggianti per le prime, in quanto il parametro ω ha meno dispersione tra i vari casi, i parametri del fit sono più robusti e si trovano solo 2 casi di bolle fittate da LPPL in periodi non precedenti un drawdown di grosse dimensioni. Un lavoro interessante per il futuro, per gettare maggior luce su questi argomenti, è sicuramente quello di ripetere un'analisi del genere su mercati diversi, meglio se più evoluti come Wall Street, per vedere se queste debolezze sono dovute a limitazioni del mercato italiano o sono intrinseche nella scala di frequenze in questione.

Bibliografia

- [1] J. C. Anifrani, C. Le Floc'h, D. Sornette e B. Souillard, 'Universal Log-periodic correction to renormalization group scaling for rupture stress prediction from acoustic emissions', *J. Phys. I France* **5**, (6) 631–638 (1995)
- [2] L. Bachelier, 'Théorie de la spéculation' [PhD. thesis in mathematics], *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **III-17**, 21–86 (1900)
- [3] Thomas A. Bass, *The Predictors* (Holt/Viking-Penguin, 1999)
- [4] S. Bianco e R. Renò, 'Dynamics of intraday serial correlations in the Italian Futures market' (Forthcoming, Journal of Futures Markets)
- [5] F. Black e M. Scholes, 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *J. Polit. Econ.* **81**, 637–654 (1973)
- [6] O. J. Blanchard, 'Speculative bubbles, crashes and rational expectations' *Economic Letters* **3**, 387–389 (1979)
- [7] O. J. Blanchard e M. W. Watson, 'Bubbles, rational expectations and financial markets' In: P. Wachtel (ed.), *Crises in the economic and financial structure* (Lexington Books, 1982) 295–316
- [8] J. P. Bouchaud e M. Potters, *Theory of financial risk*, (Cambridge University Press, 2000)
- [9] P. K. Clark, 'A subordinate stochastic process model with finite variance for speculative prices', *Econometrica* **41**, 135–155 (1973)
- [10] A. Corcos, J. -P. Eckmann, A. Malaspinas, Y. Malevergne e D. Sornette, 'Imitation and contrarian behavior: hyperbolic bubbles, crashes and chaos', *Quantitative Finance* **2**, 264–281 (2002)

- [11] B. Deridda, L. De Seze e C. Itzykson, ‘Fractal structures of zeros in hierarchical models’, *Journal of Statistical Physics* **33**, 559 (1983)
- [12] A. Einstein ‘On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat’, *Ann. Physik* **17**, 549–560 (1905)
- [13] P. E. Gill *et al.*, ‘User’s guide for NPSOL 5.0: a FORTRAN package for nonlinear programming’ (available at <http://tomlab.biz/download/manuals.php>)
- [14] S. Gluzman e D. Sornette, ‘Log-periodic route to fractal functions’, *Phys. Rev. E* **65**, 3 418–436 (2002)
- [15] G. Huberman e T. Regev ‘Contagious speculation and a cure for cancer: a nonevent that made stock prices soar.’ *J. Finance* **56**, 387–396 (2001)
- [16] A. Johansen e D. Sornette, ‘Stock Market Crashes are Outliers’, *European Physical Journal B* **1**, 141–143 (1998)
- [17] A. Johansen e D. Sornette, ‘Critical Crashes’, *Risk* **12** (1), 91–94 (1999)
- [18] A. Johansen e D. Sornette, ‘Bubbles and anti-bubbles in Latin-American, Asian and Western stock markets: An empirical study’, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **4** (6), 853–920 (2001)
- [19] A. Johansen e D. Sornette, ‘Large Stock Market Price Drawdowns are Outliers’, *Journal of Risk* **4** (2) 69–110 (2002)
- [20] A. Johansen e D. Sornette, ‘Endogenous versus exogenous crashes in financial markets’, *Journal of Economic Dynamics and Control* (<http://arXiv.org/abs/cond-mat/0210509>)
- [21] L. P. Kadanoff ‘From Simulation Model to Public Policy: An examination of Forrester’s Urban Dynamics’, *Simulation* **16**, 261–268 (1971)
- [22] J. Laherrère e D. Sornette, ‘Stretched exponential distributions in Nature and economy: ‘Fat-tails’ with characteristic scales’, *European Physical Journal B* **2**, 525–539
- [23] F. Lillo e R. N. Mantegna, ‘Symmetry alteration of ensemble return distribution in crash and rally days of financial market’, *Eur. Phys. J. B* **15**, 603–606 (2000)

- [24] Y.Liu *et al.*, ‘Statistical properties of the volatility of price fluctuations’, *Phys. Rev. E* **60** (2), 1390–1400 (1999)
- [25] E. Majorana ‘Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali’, *Scientia* **36**, 58–66 (1942)
- [26] R. N. Mantegna e H. E. Stanley *An Introduction to Econophysics*, (Cambridge University Press, 2000)
- [27] E. W. Montroll e W. W. Badger, *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena* (Gordon and Breach, New York, 1974)
- [28] V. Pareto *Cours d’Economie Politique* (Lausanne e Paris, 1897)
- [29] W. Press, B. Flannery *Numerical recipes in C: the art of scientific computing* (Cambridge Univ. Press, 1992)
- [30] D. Sornette, ‘Discrete scale invariance and complex dimensions’, *Physics Reports* **297**, 239–270 (1998)
- [31] D. Sornette, ‘Critical Market Crashes’, *Physics Reports* **378** (1), 1–98 (2003)
- [32] D. Sornette and J. V. Andersen, ‘A Nonlinear Super-Exponential Rational Model of Speculative Financial Bubbles’, *Int. J. Mod. Phys. C* **13** (2), 171–188 (2002)
- [33] D. Sornette e K. Ide, ‘Theory of self-similar oscillatory finite-time singularities in Finance, Population and Rupture’, *Int. J. Mod. Phys. C* **14**, (3) (2002)
- [34] D. Sornette, A. Johansen e J. -P. Bouchaud, ‘Stock market crashes, Precursors and Replicas’, *J.Phys.I France* **6** (1), 167–175 (1996)
- [35] D. Sornette e A. Johansen, ‘Large financial crashes’, *Physica A* **245**, N3-4, 411–422 (1997)
- [36] D. Sornette e A. Johansen, ‘A hierarchical model of financial crashes’, *Physica A* **261**, 581–598 (1998)